UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

MODELITZACIÓ DE BONS I TIPUS D'INTERÈS A TEMPS DISCRET

Autor: Clara Llausàs Godo

Director:	Dr. Josep Vives
Realitzat a:	Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2019

Abstract

The aim of this work is to model the bond prices. In order to achieve this goal, we start presenting the fixed income securities in discrete time, in particular the zero-coupon bonds. We will also analyze how to deal with these types of bonds in the case of coupon emission, in a forward contract and in the case of interest rate swaps. We will define models in order to find bond prices in a future. The tool used are binomial trees and we are going to apply a light tracking of the Cox-Ross-Rubinstein model but of course adjusting it to the market bonds. Then, we introduce the short rates and we will notice that they will also allow us to determine the bond prices with certain extra conditions. Furthermore, we will present adaptations in discrete time of the Merton, the Vasicek and the Ho-Lee models, as models that determine the short rate.

Resum

L'objectiu d'aquest treball és modelitzar els preus dels bons. Comencem presentant els instruments de renda fixa en temps discret, en particular els bons cupó zero. També veurem com treballar amb aquests tipus de bons en el cas d'emetre cupons, en un contracte forward i en el cas de swaps de tipus d'interès. Definirem models per trobar els preus dels bons en un futur. L'eina que utilitzarem seran els arbres binomials i ho farem amb un lleuger seguiment del model Cox-Ross-Rubinstein però evidentment adaptant-lo en el mercat de bons. Posteriorment introduïm els tipus d'interès a curt termini on veurem que ens permeten determinar els preus dels bons afegint certes condicions. A més presentarem adaptacions a temps discret dels models de Merton, de Vasicek i de Ho-Lee com a models que determinen els tipus d'interès a curt termini.

Agraïments

Vull agrair a la meva família i amics, i sobretot, al meu tutor Dr. Josep Vives que m'han acompanyat en tot aquest camí.

Índex

1 Introducció

Els bons cupó zero són un instrument de renda fixa, consisteixen en un contracte en el qual l'emissor emet un bo a canvi d'una quantia i es compromet a tornar aquesta quantia més uns interessos en un moment determinat del futur. Però que passa quan aquest contracte s'incompleix? És quan ens plantegem aquesta possibilitat que apareix el risc. Per exemple, podria passar que variés el preu del bo degut a la variació dels tipus d'interès del mercat, que l'emissor del bo incompleixi el contracte, entre altres. Aquestes inseguretats, al no conèixer el valor que tindrà el contracte en un futur, és el que ens genera el risc de l'operació.

Sabem que a temps 0 els preus dels bons estan determinats per l'EURIBOR i que al seu venciment rebrem també una quantitat determinada prèviament. Però quins són els preus dels bons abans del venciment? El nostre objectiu serà modelitzar els preus dels bons en un temps futur. Buscarem models a temps discret que ens permetin treballar amb el mercat de bons per tal de poder trobar tots els preus dels bons de diferent venciment en un futur. Per a trobar models que s'aproximin a la realitat sabem que s'ha de complir el Principi de No Arbitratge, és a dir, no pot ser que s'aconsegueixin beneficis sense risc. Per aconseguir-ho utilitzarem els preus dels bons com a variables aleatòries que hauran de complir la propietat de martingala, és a dir, que l'esperança dels preus descomptats dels bons sigui constant per a qualsevol instant de temps. Veiem doncs, que existeix una única probabilitat neutral al risc per la qual els preus dels bons descomptats són martingala tal i com ens diuen els Teoremes Fonamentals de les Finances.

2 Tipus d'interès simple i compost

Comencem veient els conceptes més simples. Ens situem en un espai de temps discret finit amb instants de temps espaiats uniformement $n = 1, 2, 3, ..., N$. L'espai de temps entre aquests instants l'anomenarem període p que representarem per una fracció d'any. També tenim en compte el nombre de períodes que hi ha en un any $m = 1/p$ que anomenarem freqüència.

Podem diferenciar a grans trets el tipus d'interès simple i el tipus d'interès compost. El règim d'interès simple no genera interessos d'una quantia fins al seu venciment. En canvi, el règim d'interès compost genera interessos en cada període, els quals s'afegeixen a la quantia per tornar a generar interessos en el següent període i així succesivament fins a arribar al venciment.

Fixem-nos amb la següent igualtat

$$(1 + I_{1/m})^m = 1 + i$$

on i és el tipus d'interès simple que ens indica la rendibilitat d'un any i $I_{1/m}$ és el tipus d'interès efectiu amb freqüència de capitalització m. Veiem que una mateixa operació es pot entendre amb tipus d'interès simple o compost i obtenir la mateixa rendibilitat. Interpretant la igualtat anterior en un any una operació genera i interessos en règim d'interès simple, o equivalentment, en un període p genera $I_{1/m}$ interessos que s'acumulen i en el següent període torna a gerenerar $I_{1/m}$ interessos de la quantia total, i així succesivament m vegades perquè són els períodes que hi ha en un any.

Si ens fixem en cada període, en el règim d'interès compost, estem aplicant un tipus d'interès simple només en aquell període. Fàcilment veiem que el tipus d'interès anual és lineal al període p, és a dir, $I_{1/m} = i_m p$, o equivalentment, $I_{1/m} = \frac{i_m}{m}$, on i_m és el tipus d'interès anual capitalitzable amb freqüència m. Per tant, i_m és un tipus d'interès anual però que anotem amb un subíndex la freqüència amb la que capitalitza. Això ens fa pensar que no hi ha intercanvis monetaris entre períodes. Observem que si $m = 1$ aleshores el tipus d'interès efectiu amb freqüència de capitalització d'un any I_1 coincideix amb el tipus l'interès anual capitalitzable anualment i_1, o bé com hem vist en la igualtat $i = i_1$. A més observem que si $1 \leq k < l$ aleshores $i_l < i_k$. És a dir, i_m és una funció decreixent respecte la freqüència m. Prenem $i = i_1$, és a dir, i és el tipus d'interès anual i tenim

$$(1 + i) = (1 + m i_m)^m$$

aïllant obtenim

$$i_m = \frac{\sqrt[m]{1 + i} - 1}{m}.$$

Considerem la funció

$$i_m(m) = \frac{\sqrt[m]{1 + i} - 1}{m}$$

i derivem

$$i'_m(m) = \frac{-(\sqrt[m]{1+i}-1)-(\sqrt[m]{1+i})ln(1+i)\frac{1}{m}}{m^2}$$

fàcilment veiem que la derivada és negativa per a qualsevol valor $m > 1$.

Sigui A un actiu sense risc, notarem $A(k)$ el preu de l'actiu sense risc a temps k. Anem doncs a identificar dos perspectives diferents. La primera seria veure l'increment total el qual expressem com a producte de factors de creixement en cada període del tipus $(1 + I_{1/m})$. És a dir,

$$A(n) = A(n-1)(1 + I_{1/m}) = A(n-2)(1 + I_{1/m})^2 = \cdots = A(0)(1 + I_{1/m})^n.$$

L'altra perspectiva seria veure l'increment total expressat com un sol factor de creixement, en aquest cas utilitzem l'interès simple. És a dir,

$$A(n) = A(0)(1 + i_{op})$$

on i_{op} és l'interès simple total de l'operació.

Nosaltres utilitzarem aquesta segona perspectiva, és a dir, utilitzarem el tipus d'interès simple per valorar la quantia d'un actiu sense risc en un instant n, $A(n)$, en el qual no hi ha hagut intercanvis monetaris durant l'operació. Llavors amb aquest interès simple obtindrem l'interès simple anual i la rendibilitat de l'operació. Per tant, la fòrmula la notariem de la següent manera

$$A(n) = A(0)(1 + i(0,n)pn)$$

i fàcilment obtenim

$$i(0,n) = \frac{1}{np}\frac{A(n) - A(0)}{A(0)}$$

on $i(0,n)$ és l'interès simple anual que s'aplica a un actiu sense risc que venç a n a dia d'avui.

Observem que podem expressar $i(0,n)$ en funció de i, suposant que i sigui l'interès anual tenim

$$i(0,n) = \frac{1}{np}((1 + ip)^n - 1).$$

A més veiem fàcilment que $(i(0,n))_{n \in N}$ és una successió decreixent.
Notem que quan $n = m$ tenim $i(0,m) = i$, és a dir, coincideix amb l'interès simple anual.

Però que passa si l'operació comença a un temps futur k, $0 < k < n$? En aquest cas no coneixem el tipus d'interès $i(k,n)$ que s'aplica a l'operació. Més endavant veurem com construir models amb aquests tipus d'interès. Abans anem a veure instruments de renda fixa amb els quals podem treballar.

3 Instruments de renda fixa

Els productes de renda fixa majoritàriament consisteixen en bons i obligacions, tot i que, n'hi ha una gran diversitat amb vàries especificacions, també s'inclouen Lletres del Tresor, pagarés d'empresa, entre altres. En general varien segons la duració, el nivell de risc i les formes en que rebem els interessos. I es poden classificar segons l'emissor, el termini de captació i negociació, i també, pel tipus de rendiment que genera. Tots aquests productes de renda fixa són títols representatius de deute, en concret, aquests títols són un document que concedeix un dret econòmic al posseïdor, el qual es converteix en creditor de l'emissor que pot ser una empresa privada o bé un organisme públic.

Els actius de renda fixa són aquells que es basen en l'entrega d'un nominal en la data d'emissió de part d'un inversor a un emissor i la devolució d'aquest nominal més els interessos obtinguts durant un període de temps en la data de venciment de part de l'emissor al inversor.

Tinguem clar que renda fixa no vol dir que la rendibilitat sigui fixa ni tampoc que hi hagi absència de risc. El risc i la rendibilitat estaran influenciats per la manera en que actuï l'inversor. Pot passar que l'inversor decideixi mantenir el títol fins al seu venciment, o bé, que vulgui vendre el títol a un altre inversor abans del seu venciment. Quan l'inversor vol mantenir el títol fins al seu venciment la rendibilitat és coneguda prèviament, en canvi el risc per l'inversor és precisament que l'emissor incompleixi l'obligació econòmica que té amb la devolució del nominal com amb el pagament dels interessos. Aquest risc s'anomena risc de crèdit o risc de insolvència. D'aquesta manera quan el risc d'insolvència del títol sigui elevat, la rendibilitat haurà de ser més elevada per tal de ser atractiva de cara a l'inversor. L'altra opció és que l'inversor vulgui revendre el títol, en aquest cas el rendiment que obtindrà serà la diferència entre el preu de transmissió al qual ven el títol en un mercat secundari a un altre inversor en un futur i el preu d'emissió pel qual va adquerir el títol. En aquest cas el risc per l'inversor és que desconeix el preu de transmissió. Aquest preu de transmissió estarà determinat per l'oferta i la demanda dels inversors en el seu títol. La demanda es veu afectada sobretot pels tipus d'interés del mercat, quan els tipus d'interès pugen, els preus dels títols de renda fixa baixen i viceversa. Veiem doncs que l'inversor corre un risc de tipus d'interès, aquest risc serà més gran com més temps hi hagi fins a la data de venciment del títol. Per tant, el que més influeix en el rendiment de la renda fixa són els tipus d'interès.

Seguidament anem a veure alguns d'aquests instruments de renda fixa.

3.1 Bo cupó zero

Hi ha diferents tipus de bons: bons de l'Estat, bons convertibles, bons amb opció a la recompra, bons amb opció a la revenda, bons simples, etc. Però nosaltres treballarem amb el bo cupó zero.

Un bo cupó zero és un títol que no paga interessos al llarg de la seva vida sinó que s'emet descomptat del preu nominal que es rebrà en el seu venciment. Llavors és un pacte que garanteix a l'obligacionista rebre el nominal F en la data de venciment. El temps de vida d'un bo cupó zero és relativament curt, normalment d'un any.
Suposarem sense pèrdua de generalitat que parlem de bons unitat, és a dir, $F = 1$. Suposarem que per a qualsevol data d'emissió el mercat inclou n-bons comercialitzables. El bo emès a temps k fins a la data de venciment n en la qual és intercanviat per una unitat monetària, ho notarem com un n-bo.
Notarem $B(k, n)$ com el preu al comptat d'un n-bo a temps $k \leq n$ que compleix $0 < B(k, n) < 1$ i evidentment $B(n, n) = 1$.

La dependència del preu del bo a temps k que venç d'aquí n períodes ens descriu la funció $n \mapsto B(k, k + n)$ que anomenem estructura temporal dels preus d'un bo a temps k que venç d'aquí n períodes, o bé, corba de preus d'un bo a temps k. Es pot esperar que a mesura que n creix el preu del bo decreix.

És preferible treballar amb els tipus d'interès que amb els preus del bo ja que ens proporcionanen una idea més intuïtiva i més clara de l'evolució i la rendibilitat de l'operació. Aquests tipus d'interès venen determinats per l'EURIBOR, acrònim de European Interbank Offered Rate. L'EURIBOR és el tipus d'interès interbancari d'oferta del mercat europeu, en altres paraules, la mitjana del tipus d'interès amb el qual els bancs europeu fan intercanvis monetaris. És un interès determinat per la continua negociació dels bancs i canvien continuament de manera que l'oferta dels fons en el mercat interbancari s'iguala amb la demanda de fons en aquest mateix mercat.

En el cas dels bons aplicarem el règim d'interès simple utilitzant l'EURIBOR anual que notarem com $E(k, n)$. D'aquí tenim que el preu al comptat d'un n-bo a temps k és

$$B(k, n) = \frac{1}{1 + (n - k)pE(k, n)}.$$

Observem que al mantenir el n-bo fins al seu venciment obtenim la següent rendibilitat

$$K(k, n) = \frac{1 - B(k, n)}{B(k, n)}$$

o equivalentment,

$$K(k, n) = (n - k)pE(k, n).$$

Fàcilment s'observa que $E(k,n)$ és la rendibilitat anual.

Acabem de veure que per calcular els preus dels bons a temps k necessitem conèixer els tipus d'interès en aquest precís moment, però com hem dit anteriorment no coneixem el que valdran els tipus d'interès en el futur.

Anem a veure que passa si coneixem els preus del bo en un futur. Considerem la següent proposició,

Proposició 3.1. *Suposem que el preu futur del bo $B(k,n)$ és conegut a temps 0 on $0 < k < n$. Aleshores $B(0,n) = B(0,k)B(k,n)$.*

Demostració. Aplicarem l'argument de l'absència d'arbitratge. Primer, suposem la següent desigualtat

$$B(0,n) < B(0,k)B(k,n)$$

llavors en temps 0 comprem un n-bo i venem la part proporcional $B(k,n)$ d'un k-bo, és a dir, obtenim un balanç positiu $-B(0,n) + B(k,n)B(0,k) > 0$ per hipòtesis. Aquests seran els beneficis de l'oportunitat d'arbitratge. Ja que a temps k per tancar la posició curta dels k-bons necessitarem exactament $B(k,n)$. Per altra banda, suposem

$$B(0,n) > B(0,k)B(k,n)$$

llavors en temps 0 venem un n-bo i comprem la part proporcional $B(k,n)$ d'un k-bo, obtenim un balanç positiu $B(0,n) - B(k,n)B(0,k) > 0$ per hipòtesis. De la mateixa manera aquests seran els beneficis. Per tant, si no volem contradir el Principi de No Arbitratge s'ha de complir la igualtat. $\square$

Observem que els preus dels bons en els mercats no compleixen la igualtat de la proposició anterior, per tant els models de mercat reals han de permetre que els preus dels bons en un moment futur k, $B(k,n)$, per $0 < k < n$ siguin valors aleatoris. Aleshores, en un model d'aquest estil trobem la possibilitat de variacions en els tipus d'interès que introdueixen el risc en les nostres inversions.

Si comprem un n-bo a temps 0 i el venem a temps k, tindrem la següent rendibilitat

$$K(0,k) = \frac{B(k,n) - B(0,n)}{B(0,n)}.$$

Suposant que coneixem el preu dels bons en un futur, de la proposició anterior tenim

$$K(0,k) = \frac{1 - B(0,k)}{B(0,k)}$$

d'on aleshores

$$K(0,k) = kpE(0,k).$$

Veiem que la rendibilitat és lineal al tipus d'interès sense risc.

En general, a partir d'una de les igualtats anteriors també podem expressar la rendibilitat com a

$$K(0,k) = \frac{1+npE(0,n)}{1+(n-k)pE(k,n)} - 1.$$

Cal tenir en compte que quan mantenim un bo fins a la data de venciment no generem cap risc ja que al venciment rebem una unitat segura.

3.2 Tipus forward

Un forward és un producte derivat, això vol dir que és un instrument financer el qual el seu valor depèn del valor d'un altre. Aquests derivats es negocien en mercats no regulats (Over-The-Counter), això fa que sigui difícil desfer una posició. Generalment són operacions interbancàries o bé entre un banc i el seu client.

Un contracte forward és un pacte que consisteix en intercanviar un actiu en un temps futur concret i a un preu acordat prèviament, que anomenarem preu d'entrega K. Una de les parts pren la posició llarga i en el moment futur pactat haurà de comprar l'actiu pel preu acordat, l'altra part pren una posició curta i en el moment futur pactat haurà de vendre l'actiu pel preu acordat. El preu forward es coneix com el preu d'entrega de forma que el valor del contracte forward sigui 0 per les dues parts en el moment que s'estableix aquest pacte. Això significa que no hi ha efectes negatius al prendre una posició curta o llarga.

Hi ha diferents tipus de forwards, els més coneguts són el Forward de Divises i el Forward Rate Agreement(FRA).

Suposem que el nostre actiu del contracte forward és un bo, i com hem vist, estan estretament relacionats amb els tipus d'interès, per tant parlarem d'un Forward Rate Agreement. Mitjançant aquest contracte obtenim protecció pel que fa a fluctuacions dels tipus d'interès que hi puguin haver-hi en el futur.
Veiem més detalladament com determinem aquest preu forward $B(k,m,n)$. Suposem un contracte forward d'un n-bo pactat a temps k amb data d'entrega m on $k < m \leq n \leq N$ a un cert preu d'entrega K acordat prèviament.
Com hem dit abans el contracte consisteix en comprar i vendre entre dues parts un actiu en un temps futur determinat i per un preu determinat, observem abans que la part que compra adoptarà una posició llarga amb perfil de beneficis a temps m $B(m,n) - K$ i la part que ven adoptarà una posició curta amb perfil de beneficis $K - B(m,n)$. Llavors, en general, a temps k, si evitem oportunitats d'arbitratge, per la part que adopta la posició llarga, tenim el següent perfil de beneficis

$$H(k) = \mathbb{E}_Q(\tilde{B}(m,n) - \tilde{K}) = B(k,n) - K(1+R)^{-(m-k)}$$

on es calcula el valor descomptat del perfil de beneficis respecte la probabilitat neutral al risc Q. Sigui $S(m)$ el preu d'un actiu a temps m, el preu descomptat de l'actiu a temps k és $\tilde{S}(m) = S(m)(1+R)^{-(m-k)}$ on R és la rendibilitat de l'actiu sense risc.

Proposició 3.2. *El valor d'un forward a temps* k *inicialitzat a temps* 0 *amb preu d'entrega* K *és* $H(k) = B(k,n) - K(1+R)^{-(m-k)}$.

Generalment, definim el preu forward $B(k,m,n)$ com el preu d'entrega que fa valdre 0 el contracte pactat a temps k i amb entrega a temps m. Prenent $\frac{1}{B(k,m)}$ com factor de creixement sense risc, tenim

Corol·lari 3.3. *El Principi de No Arbitratge implica que el preu forward a temps* $k < m$ *és* $B(k,m,n) = B(k,n)\frac{1}{B(k,m)}$.

Ara sí que enunciem el teorema que ens defineix els preus forward d'un bo,

Teorema 3.4. *El preu forward d'un* n*-bo és* $B(k,m,n) = \frac{B(k,n)}{B(k,m)}$.

Demostració. Aplicarem l'argument de l'absència d'arbitratge. Primer de tot, suposem que

$$B(k,m,n) > \frac{B(k,n)}{B(k,m)}$$

llavors construïm la següent estratègia. A temps k prendrem una posició curta forward de cost 0, comprarem un n-bo pagant $B(k,n)$ i adoptarem una posició curta $\frac{B(k,n)}{B(k,m)}$ de m-bons, d'on rebrem $B(k,n)$. Llavors a temps m vendrem el n-bo pel preu forward $B(k,m,n)$ i tancarem la posició curta de tots els m-bons mantinguts fins a temps m, és a dir, pagarem $\frac{B(k,n)}{B(k,m)}$. El benefici de l'arbitratge serà $B(k,m,n) - \frac{B(k,n)}{B(k,m)} > 0$ per hipòtesis.
Ara suposem

$$B(k,m,n) < \frac{B(k,n)}{B(k,m)}$$

llavors durem a terme l'estratègia contària. A temps k adoptarem una posició llarga forward, vendrem un n-bo rebent $B(k,n)$ i comprarem $\frac{B(k,n)}{B(k,m)}$ de m-bons. Llavors a temps m rebem un n-bo pel preu forward $B(k,m,n)$ i usem el bo per tancar la posició curta d'un n-bo mentres cobrem $\frac{B(k,n)}{B(k,m)}$ dels m-bons. En aquest cas el benefici de l'arbitratge serà $\frac{B(k,n)}{B(k,m)} - B(k,m,n) > 0$ per hipòtesis. Per tant, si no volem contradir el Principi de No Arbitratge s'ha de complir la igualtat. □

Notem que si coneixem el preu futur d'un bo $B(m,n)$ per $m < n$ per la Proposició 3.1 tenim que coincideix amb el preu forward $B(0,m,n)$, ja que els dos preus estan donats per $\frac{B(0,n)}{B(0,m)}$ que són preus coneguts. És a dir, el Principi de No Arbitratge ens dóna un preu forward independent de qualsevol risc.

Anem a veure els tipus d'interès provinents dels preus forward, aquests tipus d'interès són determinats a temps k i tenen validesa en l'interval de temps de m fins a n, on $k \leq m$, proporcionant-nos el preu forward d'un bo. Per fer-ho relacionarem els preus dels bons i el tipus al comptat.

Seguidament anem a veure varis tipus d'interès.

El tipus d'interès forward simple $F(k, m, n)$ de m a n contractat a k és el tipus d'interès que apliquem en el preu forward d'un bo

$$B(k, m, n) = \frac{1}{1 + (n - m)pF(k, m, n)}.$$

Considerem el següent teorema,

Teorema 3.5. *Per tipus d'interès forward simple d'un dipòsit on $k \leq m < n$ tenim*

$$F(k, m, n) = -\frac{B(k, n) - B(k, m)}{(n - m)pB(k, n)}$$

$$F(m, m, n) = E(m, n).$$

Demostració. Per la definició tenim

$$F(k, m, n) = \frac{1}{(n - m)p} \left(\frac{1 - B(k, m, n)}{B(k, m, n)} \right)$$

aplicant el Teorema 3.4 obtenim

$$F(k, m, n) = \frac{1}{(n - m)p} \left(\frac{B(k, m) - B(k, n)}{B(k, n)} \right).$$

Si prenem $k = m$ llavors

$$F(m, m, n) = \frac{1}{(n - m)p} \left(\frac{1 - B(m, n)}{B(m, n)} \right).$$

□

El tipus d'interès forward instantani o tipus d'interès forward contractat a k amb venciment $n < N$ el definim per

$$F(k, n) = F(k, n, n + 1)$$

utilitzant la definició de tipus d'interès forward simple obtenim

$$F(k, n) = -\frac{B(k, n + 1) - B(k, n)}{pB(k, n + 1)}$$

i operant obtenim

$$(1 + pF(k, n))B(k, n + 1) = B(k, n).$$

D'aquí treiem la següent fórmula inductiva

$$B(k, n + 1) = B(k, n)\frac{1}{1 + pF(k, n)}.$$

El nostre objectiu serà determinar si els tipus d'interès forward determinen els preus dels bons o no. Per fer-ho utilitzem la fórmula inductiva anterior, per $n = k, k+1, \ldots, N-1$ obtenim

$$B(k,k+1) = \frac{1}{1+pF(k,k)}$$

$$B(k,k+2) = B(k,k+1)\frac{1}{1+pF(k,k+1)} = \frac{1}{1+pF(k,k)}\frac{1}{1+pF(k,k+1)}$$

i així successivament, després d'un nombre finit de passos, arribem al venciment n i obtenim la següent expressió

$$B(k,n) = \frac{1}{1+pF(k,k)}\frac{1}{1+pF(k,k+1)}\cdots\frac{1}{1+pF(k,n-1)}.$$

D'aquesta manera concloem que els preus dels bons en el futur venen determinats pels tipus d'interès forward.

El tipus d'interès a curt termini es defineix com

$$R(k) = F(k,k).$$

Quan prenem com a període $p = \frac{1}{360}$ sota el conveni que un any es divideix en 12 mesos de 30 dies, llavors $R(k)$ és el tipus d'interès overnight. Per la definició de tipus d'interès forward, tenim

$$R(k) = -\frac{B(k,k+1)-1}{pB(k,k+1)}.$$

Observem que si $k \leq n$ tenim $B(k,n) = (1+i)^{-(n-k)}$ on i és el tipus d'interès anual ($p = 1$) aleshores el tipus d'interès forward simple és

$$F(k,m,n) = -\frac{1-(1+i)^{(n-m)}}{(n-m)}$$

el tipus d'interès forward és

$$F(k,n) = F(k,n,n+1) = i$$

i el tipus d'interès a curt termini és

$$R(k) = F(k,k) = i.$$

El compte bancari és una inversió amb un valor inicial que en un cert moment k s'hi aplica el tipus d'interès a curt termini. Per tant, el definim per $A(n) = A(0)(1+R(0)p)(1+R(1)p)\cdots(1+R(k-1)p)$. A l'inici de cada període coneixem el tipus d'interès a curt termini que aplicarem en el període, però no coneixem els que aplicarem en els següents períodes. D'aquesta manera al final de cada període coneixem el valor del compte. D'aquesta manera, el mercat monetari no representa un actiu sense risc quan es tracta d'instruments de renta fixa.

3.3 Bons amb cupó

Normalment els bons tenen una vida relativament curta com hem dit abans. Però a vegades també trobem bons que tenen una vida més llarga, aquests normalment solen emetre cupons al llarg de l'operació.

Primer de tot anem a veure els més senzills que són els bons amb cupó fix.

3.3.1 Bons amb cupó fix

Els bons amb cupó fix són bons que ens proporcionen uns pagaments, que anomenarem cupons, en unes dates predeterminades. És a dir, el titular del bo rep en les dates $k_1, k_2, ..., k_J$ els cupons $C_1, C_2, ..., C_J$ i a més a més a la data de venciment k_J rep el valor del nominal F. Suposem que les dates $k_1, ..., k_J$ estan equiespaiades per una costant c. Aleshores el cupó és emès a la data $k_1 - c$, tinguent en compte que k_1 és la data en que s'emet el primer cupó.

Anem a calcular el preu d'un bo amb cupó fix. Observem que els pagaments obtinguts d'un bo amb cupó fix es poden generar considerant una operació determinada utilitzant bons cupó zero amb venciments adequats. Llavors a temps 0, considerem $C_jB(0, k_j)$ d'un k_j-bo per $j = 1, ..., J$ d'on rebrem C_j a temps k_j i $FB(0, k_J)$ d'un k_J-bo d'on rebrem F a temps k_J. Observem que coneixem les dates i els valors a temps 0. Els preus són coneguts de manera que podem generar un inversió que ens generi aquests cupons amb certesa. Llavors, el valor a temps 0 d'aquesta nova operació és el preu inicial del bo

$$P(0) = \sum_{j=1}^{J} C_jB(0, k_j) + FB(0, k_J).$$

A la pràctica els preus dels bons unitat només es coneixen per venciments a curt termini ja que bons cupó zero que vencin a llarg termini normalment no s'emeten, en canvi, els preus dels bons amb cupó amb venciment a llarg termini sí que els coneixem. Per tant, a la pràctica coneixem F, C_j i $P(0)$ i haurem de calcular $B(0, k_j)$. Per calcular-ho necessitarem informació suficient de varis bons amb cupó emesos. Un mètode de valoració per trobar l'estructura d'un bo cupó zero amb venciments a llarg termini s'anomena bootstrapping. Es basa en utilitzar el tipus d'interès a curt termini per calcular el del següent període.

A la realitat no tindrem tantes dades ni tanta exactitud, a més, tindrem més valors per determinar que condicions. Llavors per trobar la solució caldria incorporar noves condicions basades amb la interpolació lineal.

Normalment els cupons són constants, és a dir, $C_j = C$. Fins i tot, a vegades s'expressen com un percentatge del nominal, C/F que anomenarem tipus d'interès cupó. Notem que aquest tipus d'interès no està anualitzat.

Observem que si $p = 1$, el tipus d'interès cupó equival al tipus d'interès implícit, és a dir, $C/F = i$ si i només si $P(0) = F$. Considerem $C = Fi$ i $B(0, k_j) = \frac{1}{(1+r)^j}$, aleshores,

$$P(0) = \sum_{j=1}^{J} C_j B(0, k_j) + FB(0, k_J) = \frac{Fi}{1+i} + \frac{Fi}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{Fi}{(1+i)^{J-1}} + \frac{F}{(1+i)^J}$$

operant obtenim $P(0) = F$.

Suposem que l'obligacionista compra un bo cupó fix a temps k on $k_i \leq k < k_{i+1}$, és a dir, en un intant de temps entre períodes. Llavors el valor financer del bo amb cupó fix a temps k és

$$P(k) = \sum_{j=i+1}^{J} C_j B(0, k_j) + FB(0, k_J)$$

o equivalentment utilitzant el tipus d'interès cupó tenim

$$P(k) = \left(\frac{C}{F} \sum_{j=i+1}^{J} C_j B(0, k_j) + B(0, k_J) \right) F.$$

A vegades d'aquest preu s'en diu preu brut del bo o preu complet. A $k+1$ l'obligacionista rebrà el cupó C_{k+1}, és a dir, l'interès generat de k_i a k_{i+1} però observem que només hauria de rebre la part del cupó corresponent a la proporció de temps entre k i k_{i+1}. Introduïm el concepte de cupó corregut a temps k que és la part proporcional del cupó que correspon entre k_i i k la qual no rebrà el titular en cas de venda

$$AI(k) = C \frac{k - k_i}{k_{i+1} - k_i}.$$

El preu ex-cupó d'un bo o preu net és

$$CP(k) = P(k) - AI(k)$$

és la valoració del bo cupó fix que preten aïllar l'efecte del cupó corregut.

3.3.2 Bons de tipus d'interès variable

En aquest cas els cupons no estan predeterminats amb anterioritat sinó que varien en cada període en el que s'emet el cupó.

El cupó d'un bo de tipus d'interès variable és

$$C_j = (k_j - k_{j-1}) p E(k_{j-1}, k_j) F$$

veiem que el valor del cupó que s'emet a temps k_j es determina un període abans amb el tipus d'interès $E(k_{j-1}, k_j)$. Recordem que els tipus d'interès futurs no els coneixem per tant al començament només coneixem el valor del primer cupó. Per tant, el cupó d'un bo de tipus d'interès variable el podem expressar com

$$C_j = F\frac{1 - B(k_{j-1}, k_j)}{B(k_{j-1}, k_j)}$$

utilitzant

$$E(k_{j-1}, k_j) = \frac{1 - B(k_{j-1}, k_j}{(k_j - k_{j-1})pB(k_{j-1}, k_j)}.$$

Teorema 3.6. *El preu inicial $P(0)$ d'un bo de tipus d'interès variable és igual a F.*

Demostració. Si $J = 1$, llavors $C_1 = F\frac{1-B(0,k_1)}{B(0,k_1)}$, de manera que

$$P(0) = (C_1 + F)B(0, k_1) = F\frac{1 - B(0, k_1)}{B(0, k_1}B(0, k_1) + FB(0, k_1) = F.$$

Si $J = 2$, llavors

$$C_2 = F\frac{1 - B(k_1, lk_2)}{B(k_1, k_2)}$$

de manera que

$$P(k_1) = (C_2 + F)B(k_1, k_2) = F.$$

Observem que a temps k_1 el preu del bo $P(k_1)$ representa el valor en el seu venciment k_2, és a dir, el valor de l'últim cupó i el nominal. Així doncs l'obligacionista del bo rebrà aquesta quantitat $P(k_1)$ a més del primer cupó, de manera que

$$P(0) = (C_1 + P(k_1))B(0, k_1) = (C_1 + F)B(0, k_1) = 1.$$

La inducció ens dòna la fórmula general. □

Quan es compleix el teorema direm que el bo compleix emissió a la par, és a dir, el preu d'emissió és igual al nominal. D'aquesta manera un bo amb cupó de tipus d'interès variable s'emet a la par a temps 0.

3.4 Swaps de tipus d'interès

Un swap consisteix en l'intercanvi de flux monetari entre dues parts en un cert temps futur amb unes condicions pactades prèviament. No es negocien en mercats regulats ni organitzats.

En concret, parlarem dels swaps de tipus d'interès, i més en concret, de l'intercanvi entre tipus d'interès variable i tipus d'interès fix que s'anomenen plain vanilla swaps. En aquest cas distingim dues parts, una part paga un tipus d'interès fix d'un nominal i rep un tipus d'interès variable sobre aquest mateix nominal, mentre que l'altra part, rep tipus d'interès fix i paga tipus d'interès variable. Notem que considerem un nominal conceptual ja que només l'utilitzarem per calcular els intercanvis monetaris, és a dir, no hi ha intercanvis de nominal. El tipus d'interès fix ve determinat pel que anomenarem tipus d'interès swap r_s mentres que el tipus variable ve determinat per les condicions del mercat, normalment basat en l'EURIBOR.

Els bancs utilitzen els swaps per ajustar característiques dels intercanvis monetaris dels actius o passius.

Un swap equival a intercanviar a temps 0 un bo amb cupó fix amb tipus d'interès cupó constant anual r_s per un bo amb cupó variable sense cost inicial. Els dos bons tenen el mateix nominal F i les mateixes dates d'emissió de cupons $0 < k_1 < k_2 < ... < k_J$. Per tant, si a k_j faig un swap d'un tipus d'interès fix per un tipus d'interès variable, en aquest moment rebré un cupó variable $FE(k_{j-1}, k_j)p_c$ i pagaré un cupó fix Fr_sp_c on $p_c = (k_j - k_{j-1})p$ és el període de temps en anys que hi ha entre cupons.

La valoració del swap en un cert temps es fa descomposant entre els intercanvis de tipus fix i els de tipus variable. En particular, el valor del swap és la diferència en un cert temps entre els interessos generats de tipus fix i variable, o viceversa. Calculem el valor del swap a temps 0. Per fer-ho, primer de tot, calculem el preu del bo de tipus variable a temps 0

$$P_{variable}(0) = F$$

pel Teorema 3.6, i llavors, calculem el preu del bo de cupó fix amb tipus cupó constant a temps 0

$$P_{fix}(0) = F\left(r_sp_c\sum_{j=1}^{J} B(0, k_j) + B(0, k_J)\right)$$

per tant, el valor actual del swap és

$$P(0) = P_{variable}(0) - P_{fix}(0) = F - F\left(r_sp_c\sum_{j=1}^{J} B(0, k_j) + B(0, k_J)\right).$$

Com volem que el cost inicial del swap sigui 0, caldrà $P(0) = 0$ ja que volem que els intercanvis siguin justos per les dues parts. Això permet calcular el tipus swap,

$$r_s = \frac{1 - B(0, k_J)}{p_c \sum_{j=1}^{J} B(0, k_j).}$$

Aquest swap que acabem d'explicar s'anomena forward swap settled in arrears, on el tipus d'interès r_s depèn de k_J, per tant, l'anotarem com $r_s(0, k_J)$. Observem que si coneixem el valor $r_s(0, k_J)$ podem trobar el preu del bo

$$B(0, k_J) = \frac{1 - B(0, k_J)}{p_c \sum_{j=1}^{J} B(0, k_j) + B(0, k_J)}.$$

D'aquesta manera acabem de veure que un swap es pot descomposar en una cartera de bons, és a dir, el valor del swap ve completament determinat per la corba de preus dels bons. Tot i que a la pràctica, el mercat de swaps és molt líquid, amb molts venciments, i això provoca que els swaps, mitjançant els tipus d'interès swap, ens proporcionin els preus del bo.

4 Modelització

Un cop vistos tots aquests instruments de renda fixa basats en una cartera de bons, anem a veure quins mètodes i estratègies podem utilitzar per estimar els preus dels bons i també els tipus d'interès que estan estretament relacionats entre ells. Com hem vist fins ara, els preus dels bons són processos estocàstics. Per tant, crearem un model matemàtic en un espai de probabilitat que ens permeti treballar en un mercat de bons. Primer de tot, anem a introduir l'arbre binomial que és l'eina que utilitzarem per aconseguir-ho.

4.1 Models d'arbres binomials

L'arbre binomial és una de les tècniques més populars per determinar preus d'actius. En el nostre cas, haurem de determinar les característiques i propietats que haurà de complir l'arbre binomial per poder treballar amb el mercat de bons.

Per començar observem que el bo cupó zero, que és el principal actiu que hem treballat, té una vida finita i en el seu venciment té un preu fixat igual a 1, d'aquesta manera cal que els models d'arbre binomial ens proporcionin preus aleatoris excepte en el seu venciment que està fixat. El fet de conèixer preus del futur amb anterioritat fa que no puguem utilitzar el model Cox-Ross-Rubinstein[1] ja que al avançar en el temps cada cop hi ha més valors possibles. En particular, utilitzarem l'estructura d'un arbre binomial uniforme, i caldrà vigilar que els preus dels bons després d'alguns períodes no siguin superiors a 1 amb probabilitat positiva.

També una altra característica és la dependència del preu del bo amb la data del seu venciment. Els bons amb diferent data de venciment els tractarem de formes separades tot i que evidentment tenen una dinàmica molt correlacionada. En un arbre binomial simple aquesta correlació és perfecte la qual cosa crea problemes. Podria passar que el model permetès oportunitats d'arbitratge, per tant, cal tenir cura i evitar oportunitats d'arbitratge.

Aquests són només alguns dels problemes a simple vista que trobem al voler modelitzar els preus dels bons. Tot seguit anem a descriure més detalladament com

[1] El descriurem breument a l'Annex.

seran els arbres binomials per modelitzar els preus dels bons.

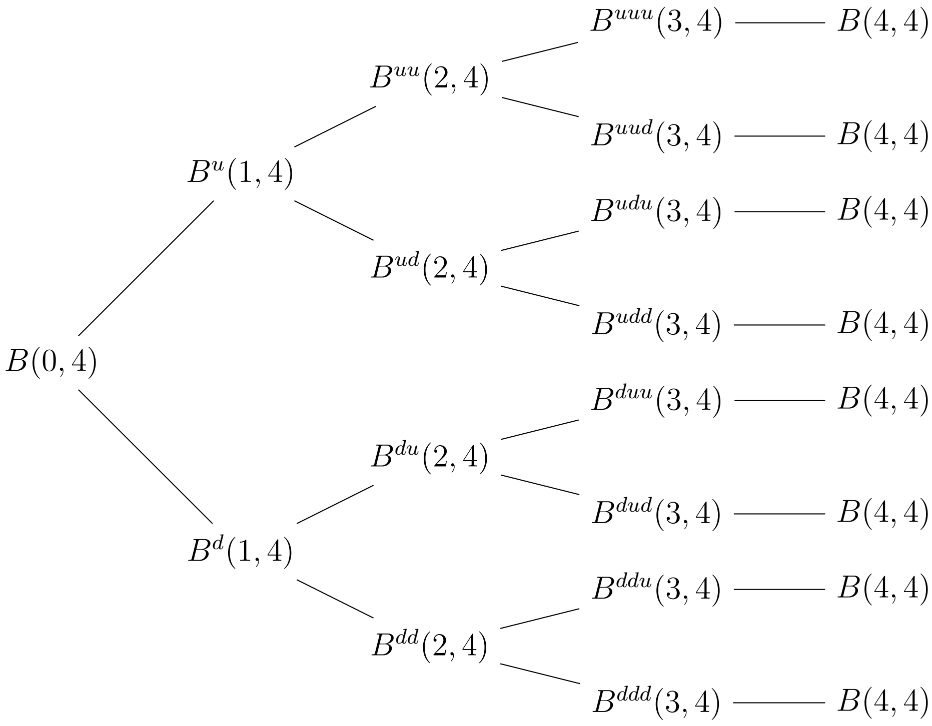
4.1.1 Arbres binomials

Considerem que tenim N bons, a temps 0 coneixem tots els preus dels bons amb venciment n on $1 \leq n \leq N$, és a dir, coneixem $B(0,1), B(0,2), \dots, B(0,N)$, a diferència del model Cox-Ross-Rubinstein on a temps 0 només coneixem el preu de l'actiu sense risc. Recordem que el preu d'aquests bons al seu venciment és 1. Notem que a temps n amb $0 < n < N$ es mantenen tots els bons que encara no han vençut, llavors evidentment a temps N només queda el N-bo. El preu dels n-bons a temps k on $0 < k < n \leq N$ són variables aleatòries, anem a veure com especificar aquestes variables aleatòries $B(k,n)$.

Primer de tot cal especificar l'espai mostral, així doncs, l'espai mostral que considerem és $\Omega = \{u,d\}^N$, és a dir, a cada instant de temps hi ha dos esdeveniments possibles 'up' i 'down'. Sigui $w \in \Omega$ és una seqüència de $(w(1), \dots, w(N))$ on $w(k) = u$ o bé $w(k) = d$. Per facilitar la notació anotarem $w_k = w(1) \cdots w(k)$. Així doncs denotarem els nodes dels arbres per aquesta seqüència $w_k = w(1) \cdots w(k)$ representant els esdeveniments fins a temps k, daquesta manera sabem quina és la posició exacte en l'arbre. Així doncs el següent node possible de w_k és $w_k u$ o bé $w_k d$. Usarem els nodes per descriure les variables aleatòries, d'aquesta manera considerarem la variable aleatòria $B^{w_k}(k,n)$ on $k < n \leq N$ per indicar el preu d'un n-bo a temps k havent succeït la seqüència d'esdeveniments w_k al llarg del temps, i evidenment $B^{w_k}(k,k) = 1$.

L'arbre binomial té dues branques que s'identifiquen amb 'up' i 'down', a l'origen de les branques en el node w_k tindrem el preu del bo $B^{w_k}(k,n)$ i al final de les branques tindrem els preus dels bons que seran $B^{w_k u}(k+1,n)$ o bé $B^{w_k d}(k+1,n)$. Prenem com a conveni $w_0 = \emptyset$ així la notació anterior té sentit per $k = 0, 1, \dots, N-1$. Notem que del penúltim node a l'últim node no hi ha dues branques ja que el preu al venciment està determinat $B(n,n) = 1$, per tant, aplicarem aquesta petita modificació a l'arbre considerant només una branca a l'últim període. Notem que a diferència del model Cox-Ross-Rubistein els preus dels bons depenen del camí recorregut.

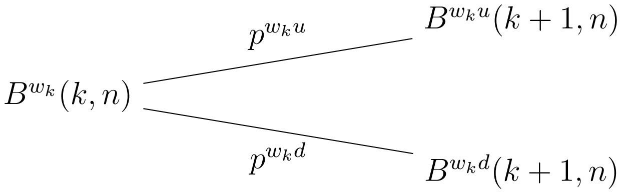
Fins aquí, per $N = 4$ el nostre arbre binomial tindrà la següent forma:



Les probabilitats de cada branca les denotarem per p^{w_k} on $p^{w_k u} + p^{w_k d} = 1$ així doncs,

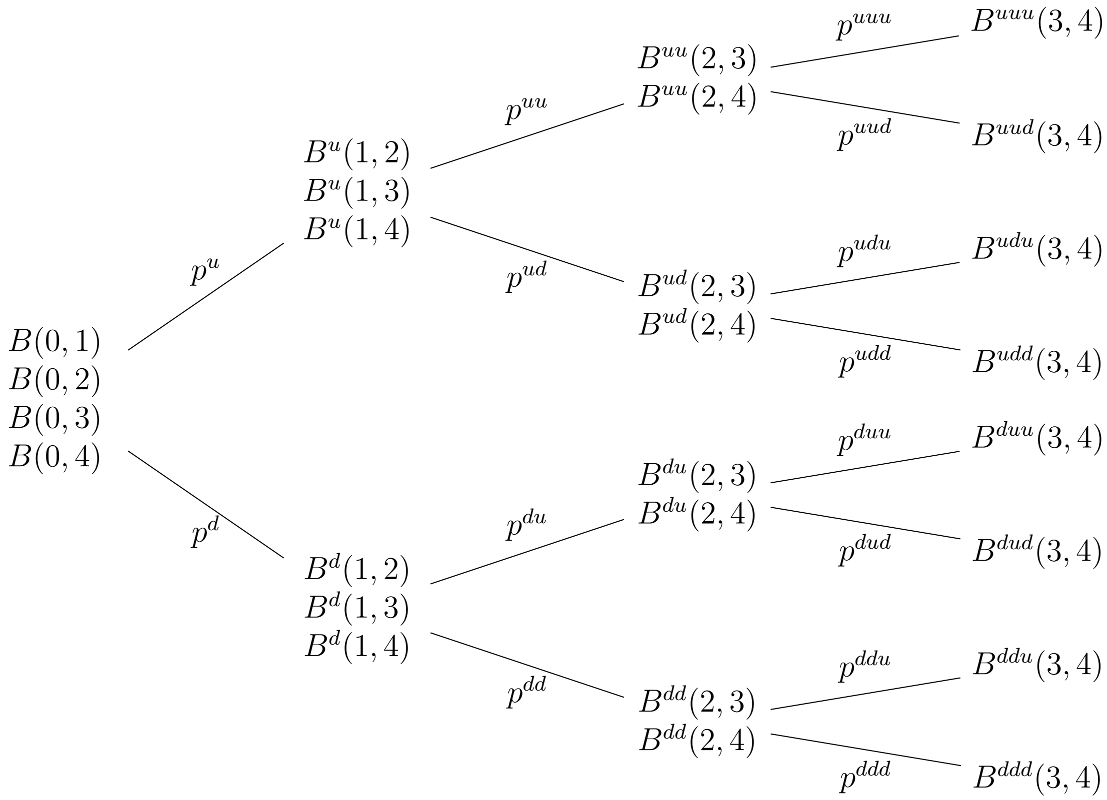
$$w_k + 1 = \begin{cases} w_k u & \text{amb probabilitat } p^{w_k u}, \\ w_k d & \text{amb probabilitat } p^{w_k d} \end{cases}$$

El pas dels preus dels bons de temps k a $k+1$ es descriu per les probabilitats $p^{w_{k+1}}$ tal i com podem veure tot seguit:



Notem que les probabilitats $p^{w_k u}$ i $p^{w_k d}$ són probabilitats condicionades d'anar al node w_{k+1} des del node anterior w_k.

Hauriem de discutir tots els bons amb els diferents venciments, per modelar correctament els preus dels bons. Per tant afegim en el nostre arbre els bons amb venciments menors i iguals que N i obtenim un arbre com el següent:



En aquest arbre binomial anterior hem representat la familia de bons que tenen venciment $n \leq N$, notem que no hem representat l'últim període de cada bo ja que no ens proporciona cap informació rellevant. A més, observem que el vector de preus de bons a cada instant de temps k es va escurçant ja que els bons van vencent. Però també pot passar que en algun moment s'afegeixin bons.

Una altra diferència que trobem amb el model Cox-Ross-Rubinstein és que en aquest model tractem els preus dels bons en comptes de les rendibiltats. Fem això perquè d'aquesta manera és més fàcil mantenir el preu per sota de la unitat, assegurant que no s'incompleix el Principi de No Arbitratge, ja que es podria adoptar una posició curta quan $B(k,n) > 1$ i esperar fins al seu venciment per desfer la posició que el valor del bo serà 1.

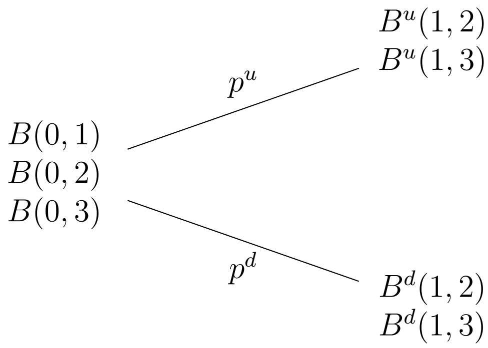
Tot seguit anem a veure com podem evitar que es produeixin oportunitats d'arbitratge. Però abans donem una definició més concreta.

Una estratègia $(x(n), y(n))$ és una oportunitat d'arbitratge si $V_{(x,y)}(0) = 0$ i $V_{(x,y)}(n) \geq 0$ per tot n i per algun n hi ha un $w \in \Omega$ tal que $V_{(x,y)}(n, w) > 0$.

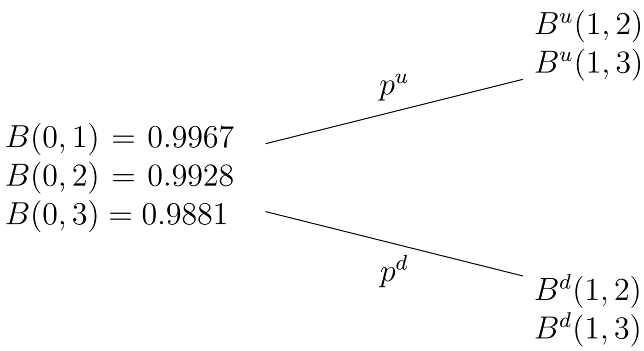
Principi de No Arbitratge. Les oportunitats d'arbitratge no existeixen en el model de mercat.

Cal tenir en compte, que en el nostre model explicat anteriorment treballem simultàniament amb diversos bons de diferents venciments, cosa que ens pot dificultar els nostres objectius.

Per facilitar-ne la comprensió amb l'ajuda d'un Excel, anem a treballar amb un exemple d'on anirem veient com modelitzar els preus dels bons intuïtivament, pas a pas. Suposem $N = 3$ i treballem amb períodes d'un mes, és a dir, $p = 1/12$. Per tant, treballarem amb 3 bons de venciment $1, 2$ i 3. Recordem també que hi ha dos esdeveniments possibles 'up' i 'down' a cada node w_k i que considerarem $p^{w_k d} = 1 - p^{w_k u}$. De moment considerem un únic període, per tant, tenim un arbre de la següent forma:



A temps 0 coneixem els preus del bons amb venciment a $1, 2$ i 3 que venen fixats per l'EURIBOR. Que són els següents $B(0,1) = 0.9967, B(0,2) = 0.9928$ i $B(0,3) = 0.9881$. Per tant,



Fixem-nos en el primer període i busquem els valors per l'instant de temps 1, $p^u = p, B^u(1,2), B^d(1,2), B^u(1,3)$ i $B^d(1,3)$. Primer de tot trobem la rendibilitat de l'actiu sense risc R, és a dir, de l'actiu que venç al primer període. Fàcilment tenim

$$R = \frac{1 - B(0,1)}{B(0,1)} = 0.00331093.$$

Per trobar $B^u(1,2), B^d(1,2), B^u(1,3)$ i $B^d(1,3)$, hem de tractar el 2-bo i el 3-bo separadament. Per tal de no incomplir el Principi de No Arbitratge, cal que busquem separadement per cada actiu les rendibilitats D i U. Sabem que quan treballem amb un únic actiu la condició per a que no hi hagi oportunitats d'arbitratge és $D < R < U$. Veiem-ho:

Teorema 4.1. *La condició $D < R < U$ implica el Principi de No Arbitratge.*

Demostració. Suposem (x, y) és una cartera amb valor incial 0, per definició de la cartera tenim

$$V_{(x,y)}(0) = xB(0,2) + yB(0,1)$$

llavors

$$y = -x\frac{B(0,2)}{B(0,1)}.$$

Calculem el valor a temps 1, substituint el valor y anterior, tenim

$$V_{(x,y)}(1) = x(B(1,2) - B(0,2)(1+R))$$

com hem dit estem en un espai mostral on hi han dos escenaris possibles 'up' i 'down', per tant $K_2(u) = U_2$ i $K_2(d) = D_2$ d'aquesta manera obtenim

$$B(0,2)(1+U_2) = B^u(1,2)$$

$$B(0,2)(1+D_2) = B^d(1,2).$$

Aleshores segons els diferents escenaris obtenim

$$V_{(x,y)}(1) = \begin{cases} x(B^u(1,2) - B(0,2)(1+R)) = xB(0,2)(U-R) \\ x(B^d(1,2) - B(0,2)(1+R)) = xB(0,2)(D-R) \end{cases}$$

Llavors, tinguent en compte la hipòtesis, si $x > 0$ tenim en el cas 'up' un valor positiu i en el cas 'down' un valor negatiu, i viceversa si $x < 0$. D'aquesta manera (x, y) no pot ser un arbitratge per a qualsevol x. □

El recíproc d'aquest teorema és cert.

Així doncs calculem les rendibilitats de cada possibilitat 'up' i 'down'. Tenim

$$\begin{aligned} U_2 &= \tfrac{B^u(1,2)-B(0,2)}{B(0,2)} \\ D_2 &= \tfrac{B^d(1,2)-B(0,2)}{B(0,2)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} U_3 &= \tfrac{B^u(1,3)-B(0,3)}{B(0,3)} \\ D_3 &= \tfrac{B^d(1,3)-B(0,3)}{B(0,3)} \end{aligned}$$

Ens trobem en que no coneixem els preus dels bons a temps 1. Aleshores una manera per trobar les rendibilitats anteriors és considerar les esperances i desviacions típiques de $B(1,2)$ i $B(1,3)$, de manera que obtenim 4 condicions, que són

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B(1,2)) &= pB^u(1,2) + (1-p)B^d(1,2) \\ \sqrt{Var(B(1,2))} &= \sqrt{p(1-p)}(B^u(1,2) - B^d(1,3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B(1,3)) &= pB^u(1,3) + (1-p)B^d(1,3) \\ \sqrt{Var(B(1,3))} &= \sqrt{p(1-p)}(B^u(1,3) - B^d(1,3)) \end{aligned}$$

Com podem observar, per trobar solucions úniques haurem d'imposar altres condicions. Prenem, per exemple, de l'històric de dades els valors de les esperances i de les desviacions típiques d'aquest tipus de bons. Per tant,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B(1,2)) &= m_2 \\ \sqrt{Var(B(1,2))} &= \sigma_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{E}(B(1,3)) &= m_3 \\ \sqrt{Var(B(1,3))} &= \sigma_3 \end{aligned}$$

d'on obtenim

$$\begin{aligned} m_2 &= 0.9961 \\ \sigma_2 &= 0.00022 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} m_3 &= 0.9915 \\ \sigma_3 &= 0.00047 \end{aligned}$$

A més també imposarem que la probabilitat és $p = 0.5$. D'aquesta manera obtenim els següents sistemes

$$\begin{aligned} 0.9961 &= 0.5(B^u(1,2) + B^d(1,2)) \\ 0.00022 &= 0.5(B^u(1,2) - B^d(1,3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.9915 &= 0.5(B^u(1,3) + B^d(1,3)) \\ 0.00047 &= 0.5(B^u(1,3) - B^d(1,3)) \end{aligned}$$

Resolem els sistemes i obtenim

$$\begin{aligned} B^u(1,2) &= 0.99632 \\ B^d(1,2) &= 0.99588 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B^u(1,3) &= 0.99197 \\ B^d(1,3) &= 0.99103 \end{aligned}$$

Amb aquests valors calculem les rendibilitats U i D pels diferents bons. I obtenim

$$\begin{aligned} U_2 &= 0.00354553 \\ D_2 &= 0.00310234 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} U_3 &= 0.00391661 \\ D_3 &= 0.00296529 \end{aligned}$$

Veiem que $D_2 < R < U_2$ i $D_3 < R < U_3$, per tant, els bons individualment compleixen el Principi de No Arbitratge.

Però nosaltres estem treballant amb tots els bons de diferents venciments alhora, per tant, sí que podriem trobar alguna oportunitat d'arbitratge. De fet, per exemple, podem trobar la següent estratègia: Considerant el 3-bo com a subjacent[2] del 2-bo, podem comprar $B(0,3)$ i vendre una cartera de $B(0,1)$ i $B(0,2)$ generant el mateix pagament que $B(1,3)$, de manera que obtenim,

$$\mathbb{E}_{q_2}(B(1,2)) = B(0,1)(q_2 B^u(1,3) + (1-q_2)B^d(1,3)) = 0.9882 > 0.9981 = B(0,3).$$

Així doncs cal imposar altres condicions per assegurar que no hi hagin oportunitats d'arbitratge.

Quan treballem amb dos actius amb risc cal que les probabilitats neutrals al risc Q_2 i Q_3 siguin iguals per evitar arbitratges, és a dir, $q_2 = q_3$, on

[2] A l'Annex explicarem com treballem amb subjacents en una cartera.

$$q_2 = \frac{R-D_2}{U_2-D_2} \qquad\qquad q_3 = \frac{R-D_3}{U_3-D_3}$$

En el nostre cas no es compleix la igualtat de probabilitats neutrals al risc, tenim

$$q_2 = 0.47065316 \qquad\qquad q_3 = 0.36332557$$

Anem a veure d'on prové aquesta condició quan tenim dos actius.

En aquest cas anterior tenim els bons $B(0,2)$ i $B(0,3)$ com actius amb risc, sabem que els preus futurs d'aquests bons estan determinats per rendibilitats aleatòries per a cada bo, U_2, D_2 i U_3, D_3 respectivament.

$$\begin{aligned} B^u(1,2) &= B(0,2)(1+U_2) \\ B^d(1,2) &= B(0,2)(1+D_2) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} B^u(1,3) &= B(0,3)(1+U_3) \\ B^d(1,3) &= B(0,3)(1+D_3) \end{aligned}$$

Ara, considerem $B(0,3)$ subjacent de $B(0,2)$, de manera que $B(1,3) = h(B(1,2))$ serà fàcil de trobar.
Considerem la probabilitat neutral al risc Q_2 determinada per $B(0,2)$, $q_2 = \frac{R-D_2}{U_2-D_2}$. Llavors sabem que el preu de $B(0,3)$ que no incompleix el Principi de No Arbitratge ve donat per

$$B(0,3) = \mathbb{E}_{Q_2}(\tilde{B}(1,3)).$$

Introduim la probabilitat neutral al risc Q_3 determinada per $B(0,3)$, $q_3 = \frac{R-D_3}{U_3-D_3}$. Per la propietat de martingala[3] de $\tilde{B}(1,3)$ tenim

$$B(0,3) = \mathbb{E}_{Q_3}(\tilde{B}(1,3)).$$

Llavors tenim la següent igualtat

$$\mathbb{E}_{Q_2}(\tilde{B}(1,3)) = \mathbb{E}_{Q_3}(\tilde{B}(1,3))$$

desenvolupem un costat de la igualtat

$$B(0,3)(1+R) = q_2 B^u(1,3) + (1-q_2)B^d(1,3)$$

$$B(0,3)(1+R) = q_2 B(0,3)(1+U_3) + (1-q_2)B(0,3)(1+D_3)$$

$$(1+R) = q_2(1+U_3) + (1-q_2)(1+D_3)$$

$$R = q_2 U_3 + (1-q_2)D_3$$

$$R = \mathbb{E}_{Q_2}(K_3)$$

per la igualtat anterior tenim

$$\mathbb{E}_{Q_2}(K_3) = \mathbb{E}_{Q_3}(K_3)$$

$$q_2 U_3 + (1-q_2)D_3 = q_3 U_3 + (1-q_3)D_3$$

d'on deduïm finalment

$$q_2 = q_3.$$

[3] A l'Annex explicarem que són les martingales i les seves propietats.

Teorema 4.2. *El Principi de No Arbitratge implica $Q_2 = Q_3$*

El recíproc també és cert.

Teorema 4.3. *Si $Q_2 = Q_3$ llavors el mercat composat per un actiu sense risc i dos actius amb risc no admet oportunitats d'arbitratge.*

Demostració. Buscant un candidat per a l'arbitratge, suposem per algunes carteres (x, y, z) el valor inicial és 0 tenim

$$V_{(x,y,z)}(0) = xB(0,2) + yB(0,1) + zB(0,3) = 0$$

$$V_{(x,y,z)}(1) = xB(1,2) + y + zB(1,3) \geq 0.$$

Calculem l'esperança del valor de la cartera a temps 1 respecte la probabilitat Q_2,

$$\mathbb{E}_{Q_2}(V_{(x,y,z)}(1)) = x\mathbb{E}_{Q_2}(B(1,2)) + yB(0,1)(1+R) + z\mathbb{E}_{Q_2}(B(1,3))$$

$$= x\mathbb{E}_{Q_2}(B(1,2)) + yB(0,1)(1+R) + z\mathbb{E}_{Q_3}(B(1,3))$$

$$= xB(0,2)(1+R) + yB(0,1)(1+R) + zB(0,3)(1+R) = 0.$$

□

Així doncs acabem de veure que calen les igualtats entre les probabilitats neutrals al risc per tal d'evitar oportunitats d'arbitratge en el nostre cas anterior on tenim $B(0,1)$ amb una rendibilitat determinada i $B(0,2), B(0,3)$ com a actius de risc.

Per intentar aconseguir la igualtat entre les probabilitats neutrals al risc podriem provar diferents opcions. Una opció és canviar el valor de la probabilitat p ja que l'haviem imposat anteriorment. Si utilitzem l'Excel de l'exemple mitjançant la opció 'Solver' ens és fàcil comprovar si hi ha algun valor p que ho aconsegueixi, en el nostre cas no s'aconsegueix la igualtat de probabilitats neutrals al risc. De fet, aquesta igualtat només succeiria en ocasions concretes quan l'històric de dades satisfès algunes condicions addicionals. Una altra opció és la igualtat entre els valors del market price of risk definit per

$$m = \frac{\mathbb{E}(K) - R}{\sqrt{Var(K)}}.$$

Sigui K la rendibilitat considerada variable aleatòria amb valors $K(u) = U$ i $K(d) = D$, llavors desenvolupant l'esperança i la desviació típica de les rendibilitats, obtenim

$$m = \frac{Up + (1-p)D - R}{\sqrt{p(1-p)}(U-D)} = \frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

D'aquí deduïm que si els market price of risk són iguals aleshores les probabilitats neutrals al risc coinceixen per a qualsevol probabilitat p. També, una opció diferent seria variar un dels preus dels bons a temps 1 cosa que provocaria l'incompliment d'alguna de les quatre condicions de l'esperança i de les desviacions típiques escrites anteriorment.

A la pràctica no ens fiarem de l'estimació de les esperances de les rendibilitats ni tampoc de les esperances dels preus futurs. Per tant, optem per una altra tècnica. Treballarem sobre el mateix exemple anterior.

Suposem ara $p = 0.5$. Assumirem que les probabilitats neutrals al risc són iguals pels bons amb venciments diferents i a més en aquest cas prendrem $q = 0.5$. Considerem la igualtat obtinguda per la propietat de martingala

$$\mathbb{E}_Q(\tilde{B}(1,2)) = B(0,2)$$

$$qB^u(1,2) + (1-q)B^d(1,2) = B(0,2)(1+R)$$

aïllant q, obtenim

$$q = \frac{B(0,2)(1+R) - B^d(1,2)}{B^u(1,2) - B^d(1,2)}.$$

Si considerem la mateixa equació també pel 3-bo i les desviacions típiques de $B(1,2)$ i $B(1,3)$, obtenim les equacions següents:

$$\begin{aligned} \tfrac{B(0,2)(1+R)-B^d(1,2)}{B^u(1,2)-B^d(1,2)} &= 0.5 \\ 0.5(B^u(1,2) - B^d(1,2)) &= 0.00022 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{B(0,3)(1+R)-B^d(1,3)}{B^u(1,3)-B^d(1,3)} &= 0.5 \\ 0.5(B^u(1,3) - B^d(1,3)) &= 0.00047 \end{aligned}$$

d'on fàcilment obtenim

$$\begin{aligned} B^u(1,2) = B(0,2)(1+R) + 0.00022 &= 0.996307087 \\ B^d(1,2) = B(0,2)(1+R) - 0.00022 &= 0.995867087 \end{aligned}$$

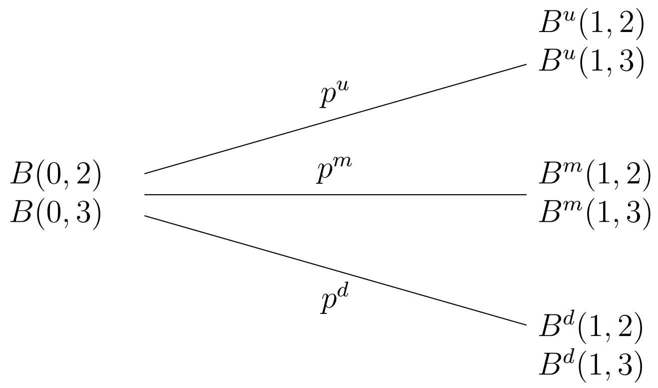
$$\begin{aligned} B^u(1,3) = B(0,3)(1+R) + 0.00047 &= 0.991841526 \\ B^d(1,3) = B(0,3)(1+R) - 0.00047 &= 0.990901526 \end{aligned}$$

En aquest model clarament no hi ha oportunitats d'arbitratge degut a la igualtat entre les probabilitats neutrals al risc pels bons de diferent venciments.

Models multi-factors

Quan parlem de models multi-factors ens referim a models en que hi ha més de dos escenaris possibles. Acabem de veure el model binomial on $\Omega = \{u, d\}$, però podria haver moltíssims més escenaris.

Considerem el model trinomial, model en el qual hi ha tres escenaris possibles, és a dir, considerem un espai mostral $\Omega = \{u, m, d\}$. Veiem que passa en aquest cas quan volem determinar els preus dels bons. Considerem l'exemple en el qual hi ha dos bons amb risc però continuem tenint un únic candidat q a les probabilitats neutrals al risc pels diferents bons de diferent venciment. Tot i així, no podem garantir que els valors de la probabilitat neutral al risc siguin valors adequats ni no degenerats. Tindriem un model de la següent forma:



on $p^d = 1 - p^u - p^m$.
Recordem que els preus dels bons no estan perfectament correlacionats, és a dir, podria ser que els preus dels bons siguin semblants però no idèntics. En aquest cas concret tenim vuit variables que són

$$\begin{array}{cccc} p^u & B^u(1,2) & B^d(1,2) & B^m(1,3) \\ p^m & B^m(1,2) & B^u(1,3) & B^d(1,3) \end{array}$$

on p^d està determinada per les altres dues probabilitats p^u i p^m. Les sis condicions que determinem basant-nos amb l'històric de dades són les esperances de $B(1,2)$ i $B(1,3)$, les desviacions típiques de $B(1,2)$ i $B(1,3)$, la correlació entre $B(1,2)$ i $B(1,3)$ i finalment les probabilitats que són

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(B(1,2)) & \sqrt{VAR(B(1,2))} & \rho(B(1,2), B(1,3)) \\ \mathbb{E}(B(1,2)) & \sqrt{VAR(B(1,3)))} & p^u + p^m + p^d = 1 \end{array}$$

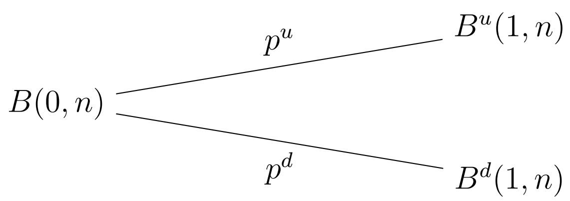
Per resoldre el sistema i aconseguir una solució única caldria considerar condicions extres.
Una d'aquestes condicions seria considerar iguals les probabilitats $p^u = p^m = p^d = 1/3$, que com hem vist abans, a l'hora de determinar els preu del bons són irrellevants ja que només hi intervenen les probabilitats neutrals al risc. El procediment per trobar condicions seria semblant en el cas binomial anterior.

A la realitat es comercialitzen molts de bons amb diferents venciments. Suposem que en el nostre model trinomial, afegissim un 4-bo, passariem a tenir onze variables i dotze condicions. En aquest cas tenim masses condicions, això voldria dir que hauriem d'afegir més branques a l'arbre obtenint un model amb moltes més branques. Calcular les variables en aquest cas resultaria inviable. La resolució d'aquest problema es solventaria aplicant models de tipus d'interès en temps continu.

Models multi-períodes

Tot seguit veurem com tractar models més complexos de varis períodes per tal de trobar els preus dels bons de diferents venciments a cada instant de temps sense que hi hagi oportunitats d'arbitratge. Per fer-ho seguirem l'enfocament general del model Cox-Ross-Rubinstein on les rendibilitats determinen el preu i on en tots els períodes les rendibilitats són les mateixes. Tot i així haurem de fer alguna variació per adaptar-lo al mercat de bons.

Considerem el següent patró, consisteix en un arbre binomial d'un sol període per bons de diferents venciments. És a dir,



on $n = 2, \dots, N$. Notem que a cada arbre simple al final del període falta un període menys per arribar al venciment, aleshores cada arbre l'identificarem amb un mateix patró usant la relació amb la distància al venciment al principi i al final de l'arbre. Aquests patrons els notarem així $(n-k)to(n-k-1)$.

Considerem $N = 4$ aleshores tindrem bons amb venciment $2, 3$ i 4 els quals faltaran $1, 2$ i 3 períodes respectivament per arribar al venciment i identifiquem els patrons $2to1$, $3to2$ i $4to3$. Veiem-ho detalladament. Suposem ara que estem a temps 1 en l'escenari possible 'up': pel $B^u(1,2)$ no li relacionarem cap patró ja que en el següent període ja arriba al venciment, pel $B^u(1,3)$ que venç d'aquí 2 períodes al principi de l'arbre i d'aquí 1 al final de l'arbre el relacionem amb el patró $2to1$ i pel $B(1,4)$ que venç d'aquí 3 períodes al principi de l'arbre i d'aquí 2 al final de l'arbre el relacionem amb $3to2$.

Així doncs el nostre objectiu serà identificar aquests patrons en l'arbre binomial de n períodes per determinar els preus dels bons de diferents venciment en tots els instants de temps. A més, considerem que totes les probabilitats neutrals al risc són $q = 1/2$. Això implica que tinguem les següents rendibilitats $U = R + \epsilon$ i $D = R - \epsilon$ on R és la rendibilitat sense risc.

Anem a veure en un exemple numèric com funcionaria. Els càlculs els realitzem amb Excel. Sigui $N = 3$ tenim un 1-bo, un 2-bo i un 3-bo. Seguint amb l'exemple anterior tenim un arbre de la següent forma:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & B^{uu}(2,3) \\
 & & \begin{array}{l} B^u(1,2) = 0.996307087 \\ B^u(1,3) = 0.991841526 \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \\
\begin{array}{l} B(0,1) = 0.9967 \\ B(0,2) = 0.9928 \\ B(0,3) = 0.9881 \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \\ \searrow \end{array} & & & B^{ud}(2,3) \\
 & & & & B^{du}(2,3) \\
 & & \begin{array}{l} B^d(1,2) = 0.995867087 \\ B^d(1,3) = 0.990901526 \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \\
 & & & & B^{dd}(2,3)
\end{array}
$$

Calculem la rendibilitat de l'actiu sense risc

$$R(0) = \frac{1 - B(0,1)}{B(0,1)} = 0.003310926.$$

Recordem que els preus a temps 0 són coneguts i donades condicions adequades també tenim els preus a temps 1. Considerem l'arbre simple a temps 0 del 2-bo que relacionem amb el patró $2to1$,

$$
\begin{array}{ccc}
 & & B^u(1,2) = 0.996307087 \\
B(0,2) = 0.9928 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \\
 & & B^d(1,2) = 0.995867087
\end{array}
$$

Calculem les rendibilitats a temps 0 del 2-bo relacionats amb el patró $2to1$ en els dos escenaris possibles i obtenim

$$U_{2to1} = \frac{B^u(1,2) - B(0,2)}{B(0,2)} = 0.0035325$$

$$D_{2to1} = \frac{B^d(1,2) - B(0,2)}{B(0,2)} = 0.0030893.$$

Tinguent en compte, que $U_{2to1} = R + \epsilon_{2to1}$ i $D_{2to1} = R - \epsilon_{2to1}$. Aleshores,

$$\epsilon_{2to1} = 0.000222.$$

Considerem l'arbre simple a temps 0 del 3-bo que relacionem amb el patró $3to2$,

$$
\begin{array}{ccc}
 & & B^u(1,3) = 0.991841526 \\
B(0,3) = 0.9881 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \\
 & & B^d(1,3) = 0.990901526
\end{array}
$$

Calculem les rendibilitats a temps 0 del 3-bo relacionats amb el patró $3to2$ en els dos escenaris possibles i obtenim

$$U_{3to2} = \frac{B^u(1,3) - B(0,3)}{B(0,3)} = 0.003786586$$

$$D_{3to2} = \frac{B^d(1,3) - B(0,3)}{B(0,3)} = 0.002835266.$$

Aleshores,

$$\epsilon_{3to2} = 0.000476.$$

Ara calculem els preus a l'instant de temps 2 del 3-bo. Situem-nos en l'escenari 'up' en l'instant de temps 1 on considerem el següent arbre simple

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & B^{uu}(2,3) \\ B^u(1,3) = 0.991841526 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & B^{ud}(2,3) \end{tikzcd}$$

Aquest arbre simple l'identifiquem amb un patró $2to1$. Calculem la rendibilitat sense risc en l'escenari 'up' de l'instant de temps 1

$$R^u(1) = \frac{1 - B^u(1,2)}{B^u(1,2)} = 0.003706601.$$

Considerem les rendibilitats en l'escenari 'up' a temps 1 en els dos escenaris possibles, tenim doncs

$$\frac{B^{uu}(2,3) - B^u(1,3)}{B^u(1,3)} = R^u(1) + \epsilon_{2to1}$$

$$\frac{B^{ud}(2,3) - B^u(1,3)}{B^u(1,3)} = R^u(1) - \epsilon_{2to1}.$$

Aïllant els preus dels bons a l'instant de temps 2, obtenim

$$B^{uu}(2,3) = B^u(1,3)(1 + R^u(1) + \epsilon_{2to1}) = 0.995737675$$

$$B^{ud}(2,3) = B^u(1,3)(1 + R^u(1) - \epsilon_{2to1}) = 0.995298099.$$

Situem-nos ara en l'escenari 'down' en l'instant de temps 1 on considerem el següent arbre simple

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & B^{du}(2,3) \\ B^d(1,3) = 0.990901526 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & B^{dd}(2,3) \end{tikzcd}$$

Aquest arbre simple l'identifiquem amb un patró $2to1$. Seguint els mateixos passos, calculem la rendibilitat sense risc

$$R^d(1) = 0.004150065.$$

I calculem els preus dels bons, obtenim

$$B^{du}(2,3) = B^d(1,3)(1 + R^d(1) + \epsilon_{2to1}) = 0.995233411$$
$$B^{dd}(2,3) = B^d(1,3)(1 + R^d(1) - \epsilon_{2to1}) = 0.994794252.$$

En general, a l'instant de temps 1, assumint $q = 1/2$, obtenim les perturbacions $\epsilon_{nto(n-1)}$ per $n \leq N$. Aleshores en el temps k quan estem al node w_k depenent de la distància al venciment l'identificarem amb un patró $nto(n-1)$. A més, usant la rendibilitat sense risc per a tots els bons en cada instant de temps i les perturbacións adequades depenent de la distància que hi ha fins al venciment. Obtenim

$$B^{w_k u}(k+1,n) = B^{w_k}(k,n)(1 + R^{w_k}(k) + \epsilon_{(n-k)to(n-k-1)})$$
$$B^{w_k d}(k+1,n) = B^{w_k}(k,n)(1 + R^{w_k}(k) - \epsilon_{(n-k)to(n-k-1)}).$$

Sembla ser que assumint $q = 1/2$ es garanteix el Principi de No Arbitratge però hem de vigilar de que els preus del bo no passin de la unitat, per tant cal trobar ajustaments apropiats per tal d'evitar-ho.

Observem que en aquest mètode que hem exposat anteriorment utilitzem els resultats obtinguts de l'instant de temps 1 en els següents períodes, d'aquesta manera el primer període és d'allò més important. Una alternativa a prendre el valor de probabilitat neutral al risc arbitràriament, tal i com hem fet, és agafar l'històric de desviacions típiques relacionades amb els bons de diferents venciments. La seqüencia d'aquests valors $\sigma(0,k)$ on $k \leq N$ l'anomenarem estructura de termes inicials de volatilitats. Clarament aquests valors estan relacionats amb les perturbacions $\epsilon_{kto(k-1)}$. Observem que si $U = R + \epsilon$ i $D = R - \epsilon$ i prenent una probabilitat $q = 1/2$ aleshores calculant la desviació estàndard de la distribució binomial obtenim $\sigma = \sqrt{q(1-q)}(U - D) = \epsilon$. Observem que en el nostre exemple coincideixen. Cal tenir en compte que l'històric de desviacions estàndards correspon a probabilitats físiques i no pas probabilitats neutrals al risc.

4.2 Tipus d'interès a curt termini

Els tipus d'interès a curt termini venen determinats pels preus dels bons que vencen en el següent període $B(k, k+1)$, tal i com hem vist anteriorment. Assumirem que aplicarem règim d'interès simple, tot i que podríem aplicar un altre règim.

El tipus d'interès a curt termini es defineix com

$$r(k) = \frac{1}{p}(\frac{1}{B(k,k+1)} - 1)$$

corresponen a una variable aleatòria excepte pel cas $k = 0$ que el coneixem de forma exacte al conèixer el preu del bo $B(0, 1)$.
Notem que hem canviat de notació i ara els tipus d'interès a curt termini els anotem amb r en comptes de R per no confondre'l amb R de la rendibilitat de l'actiu sense risc. També observem que $r(k)p = R(k)$.

Per la definició dels tipus d'interès a curt termini veiem fàcilment que si coneixem els preus dels bons $B^{w_k}(k, k+1)$ obtenim $r^{w_k}(k)$.

Tot seguit anem a veure si donats els tipus d'interès a curt termini $r^{w_k}(k)$ podem calcular els preus dels bons en qualsevol node w_k.

Seguirem amb el nostre exemple numèric, considerant els tipus d'interès $r^{w_k}(k)$ aplicant senzillament la definició trobem els preus dels bons de tipus $B^{w_k}(k, k+1)$. Amb un Excel obtenim

$B(0,1) = 0.9967$
$r(0) = 0.039731$

$B^u(1,2) = 0.996307087$
$r^u(1) = 0.044479$

$B^d(1,2) = 0.995867087$
$r^d(1) = 0.049801$

$B^{uu}(2,3)$=0.995737675
$r^{uu}(2) = 0.051367$

$B^{ud}(2,3) = 0.995298099$
$r^{ud}(2) = 0.056689$

$B^{du}(2,3) = 0.995233411$
$r_{du}(2) = 0.057473$

$B^{dd}(2,3) = 0.994794252$
$r^{dd}(2) = 0.062796$

Per trobar els preus que falten, assumim que la probabilitat neutral al risc és $q = 1/2$ i determinem el preu amb la propietat de martingala per tal de no incomplir el Principi de No Arbitratge. Llavors,

$$B^u(1,3) = \frac{1}{1 + \frac{1}{12}r^u(1)} \frac{1}{2} \left(B^{uu}(2,3) + B^{ud}(2,3) \right) = 0.991841526$$

$$B^d(1,3) = \frac{1}{1 + \frac{1}{12}r^d(1)} \frac{1}{2} \left(B^{du}(2,3) + B^{dd}(2,3) \right) = 0.990901526$$

$$B(0,2) = \frac{1}{1 + \frac{1}{12}r(0)} \frac{1}{2} \left(B^u(1,2) + B^d(1,2) \right) = 0.9928.$$

Observem que els tipus d'interès a curt termini no determinen els preus dels bons ja que depenen de l'elecció de la probabilitat neutral al risc. Tot i així, utilitzar un arbre binomial de tipus d'interès a curt termini resulta més senzill per analitzar els diferents escenaris.

Ara anem a veure que passa si variem els valors del tipus d'interès a curt termini de temps $k > 0$. Suposem que tenim una arbre de tipus d'interès a curt termini, com el següent

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & r^{uu}(1) = 0.05141 \\
 & & r^{u}(1) = 0.04451 & & \\
 & & & & r^{ud}(1) = 0.05655 \\
r(0) = 0.039731 & & & & \\
 & & & & r^{du}(1) = 0.05749 \\
 & & r^{d}(1) = 0.04959 & & \\
 & & & & r^{dd}(1) = 0.06257
\end{array}
$$

amb l'ajuda d'un Excel directament per la definició de tipus d'interès a curt termini tenim

$$B^u(1,2) = \frac{1}{r^u(1)\frac{1}{12} + 1} = 0.99630454$$

$$B^d(1,2) = \frac{1}{r^d(1)\frac{1}{12} + 1} = 0.99588451$$

$$B^{uu}(2,3) = \frac{1}{r^{uu}(1)\frac{1}{12} + 1} = 0.995734109$$

$$B^{ud}(2,3) = \frac{1}{r^{ud}(1)\frac{1}{12} + 1} = 0.995309603$$

$$B^{du}(2,3) = \frac{1}{r^{du}(1)\frac{1}{12} + 1} = 0.995232009$$

$$B^{dd}(2,3) = \frac{1}{r^{dd}(1)\frac{1}{12} + 1} = 0.994812880$$

aleshores, prenent $q = 0.5$ i de la mateixa manera que anteriorment utilitzant la propietat de martingala d'endarrere cap endavant obtenim

$$B(0,2) = \frac{1}{1 + \frac{1}{12}r(0)} \big(qB^u(1,2) + (1-q)B^d(1,2)\big) = 0.99280742$$

$$B^u(1,3) = \frac{1}{1 + \frac{1}{12}r^u(1)} \big(qB^{uu}(2,3) + (1-q)B^{ud}(2,3)\big) = 0.99184295$$

$$B^d(1,3) = \frac{1}{1+\frac{1}{12}r^d(1)}\left(qB^{du}(2,3) + (1-q)B^{dd}(2,3)\right) = 0.99092744$$
$$B(0,3) = \frac{1}{1+\frac{1}{12}r(0)}\left(qB^{u}(1,3) + (1-q)B^{d}(1,3)\right) = 0.98811363.$$

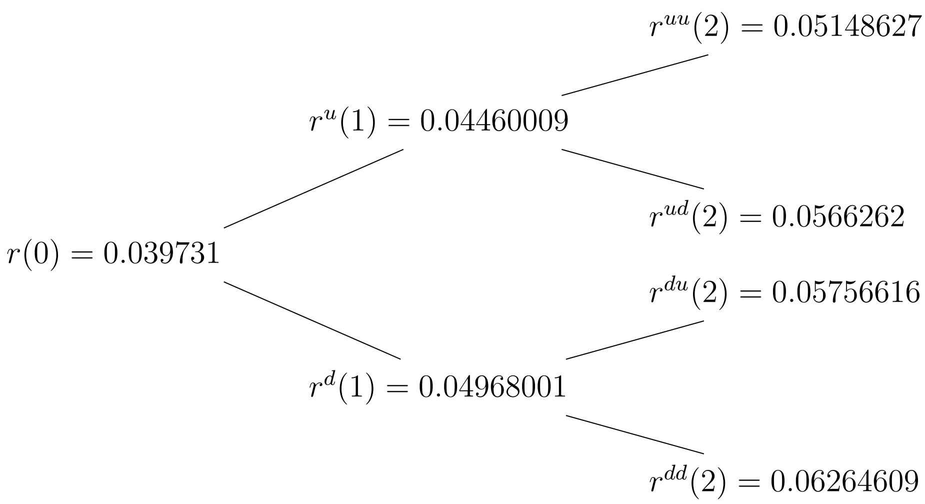
Observem que els preus dels bons a temps 0 no són arbitraris ja que venen fixats pel mercat. En el nostre cas teníem $B(0,2) = 0.9928$ i $B(0,3) = 0.9881$ preus dels bons a temps 0 donats pel mercat que no coincideixen amb els preus dels bons trobats, així doncs, no és un model adequat.

Per intentar solucionar aquest problema podem trobar una probabilitat neutral al risc que ens dongui el preu determinat pel mercat a temps 0. Suposarem que a cada node de l'arbre hi ha una probabilitat neutral al risc, nosaltres assumirem que a cada instant de temps k n'hi ha una, és a dir, $q(0)$ i $q^u(1) = q^d(1) = q(1)$. Finalment utilitzant la funció 'Solver' de l'Excel obtenim $q(0) = 0.330928$ i posteriorment $q(1) = 0.508469312$.

És a dir, donats els tipus d'interès a curt termini i les probabilitats neutrals al risc podem trobar tots els preus dels bons en qualsevol instant de temps calculant des del venciment fins a temps 0. Però tal i com acabem de veure, cal que els preus dels bons a temps 0 corresponguin amb els preus determinats pel mercat. De manera que cal que el model sigui suficientment flexible per tal de poder reajustar-lo i obtenir els preus fixats pel mercat.

Acabem de veure que el podem reajustar modificant les probabilitats neutrals al risc. També com veurem tot seguit podem reajustar el model modificant els tipus d'interès a curt termini.

Assumint $q = 1/2$, busquem els tipus d'interès a curt termini $r(k)$ per $k > 0$ que ens ajusten els preus dels bons a temps 0 donats pel mercat $B(0,2) = 0.9928$ i $B(0,3) = 0.9881$. Utilitzant la funció 'Solver' de l'Excel, obtenim



Per arbres amb molts períodes cal trobar una estructura per limitar el nombre de paràmetres. Podem considerar les següents versions discretes de models continus de tipus d'interès a curt a termini com el model Merton i el model Vasicek.

Model Merton

El model de Merton suposa que els tipus d'interès a curt termini segueixen un arbre binomial tal que

$$r^{w_k u}(k+1) = r^{w_k}(k) + ap - \sigma\sqrt{p}$$

$$r^{w_k d}(k+1) = r^{w_k}(k) + ap + \sigma\sqrt{p}$$

on a i σ són valors reals i $r(0)$ ve determinat.

Model Vasicek

El model Vasicek suposa que els tipus d'interès a curt termini segueixen un arbre binomial tal que

$$r^{w_k u}(k+1) = r^{w_k}(k) + (a - br^{w_k})p - \sigma\sqrt{p}$$

$$r^{w_k d}(k+1) = r^{w_k}(k) + (a - br^{w_k})p + \sigma\sqrt{p}$$

on a, b i σ són valors reals positius i $r(0)$ ve determinat.

Assumint que les probabilitats neutrals al risc són $q = 1/2$ a cada node, podem obtenir els preus dels bons a temps 0 corresponents amb els preus del mercat aproximant els valors de a i σ en el cas del model Merton o aproximant els valors a, b i σ en el cas del model Vasicek. Notem que quan obtenim els valors d'aquests paràmetres pot passar que els tipus d'interès a curt temini siguin negatius, ja que no els estem controlant. Això faria que els preus dels bons siguin més grans que 1 de manera que hi podrien haver oportunitats d'arbitratge. Per tant, aquests models no seran massa adequats.

Per acabar, observem que si tenim els preus del n-bo que correspon al que venç més tard i els tipus d'interès a curt termini, podem recuperar qualsevol preu dels bons amb venciment $m = 2, \cdots, n-1$. En efecte, amb aquests valors que tenim podem determinar les probabilitats neutrals al risc de la següent manera

$$q^{w_k}(k) = \frac{\frac{1}{B^{w_k}(k,k+1)} - \frac{B^{w_k d}(k+1,n)}{B^{w_k}(k,n)}}{\frac{B^{w_k u}(k+1,n)}{B^{w_k}(k,n)} - \frac{B^{w_k d}(k+1,n)}{B^{w_k}(k,n)}}.$$

Aleshores com sabem que els preus dels bons són iguals a 1 al seu venciment, utilitzant la propietat de martingala amb les probabilitats neutrals al risc podem calcular els preus en el moment previ al seu venciment. Utilitzant la propietat de martingala en cada instant de temps successivament calculem els preus dels bons en l'instant de temps previ. Obtenim

$$B^{w_k}(k,m) = \frac{1}{1+pr^{w_k}(k)} \left(q^{w_k}(k) B^{w_k u}(k+1,m) + (1-q^{w_k}(k)) B^{w_k d}(k+1,m) \right).$$

D'aquesta manera aconseguim trobar tots els preus de tots els bons.

Anem a mostrar aquest procediment en un cas concret. Sigui $p = 1/12$ i $n = 3$, considerem un arbre binomial amb els preus d'un 3-bo i els tipus d'interès a curt termini com el següent

$B^{uu}(2,3) = 0.99572781$
$r^{uu}(1) = 0.05148627$

$B^{u}(1,3) = 0.99184153$
$r^{u}(1) = 0.04460009$

$B^{ud}(2,3) = 0.99530331$
$r^{ud}(1) = 0.0566262$

$B(0,3) = 0.9981$
$r(0) = 0.039731$

$B^{du}(2,3) = 0.99522572$
$r^{du}(1) = 0.05756616$

$B^{d}(1,3) = 0.99090153$
$r^{d}(1) = 0.04968001$

$B^{dd}(2,3) = 0.9948066$
$r^{dd}(1) = 0.06264609$

Com anteriorment, ens ajudem de l'Excel. De la definició de tipus d'interès a curt termini calculem els preus dels bons $B(0,1)$, $B^u(1,2)$ i $B^d(1,2)$. Per tant,

$$B^{w_k}(k,k+1) = \frac{1}{r^{w_k}(k)\frac{1}{12}+1}$$

de manera que

$$B(0,1) = 0.9967 \qquad B^u(1,2) = 0.99629709 \qquad B^d(1,2) = 0.99587707.$$

Seguidament aplicant la fórmula anterior per calcular les probabilitats neutrals al risc, calculem $q(0)$, $q^u(1)$ i $q^d(1)$. Aleshores

$$q(0) = \frac{\frac{1}{B(0,1)} - \frac{B^d(1,3)}{B(0,3)}}{\frac{B^u(1,3)}{B(0,3)} - \frac{B^d(1,3)}{B(0,3)}} = 0.49999017$$

de la mateixa manera

$$q^u(1) = 0.52901705 \qquad\qquad q^d(1) = 0.99629709.$$

Ara calculem $B(0,2)$ que és el preu que ens falta aplicant la propietat de martingala.

$$B(0,2) = \frac{1}{1+\frac{1}{12}r(0)}\left(q(0)B^u(1,2) + (1-q(0))B^d(1,2)\right) = 0.9928.$$

En resum, acabem de veure que conéixer únicament els tipus d'interès a curt termini no és suficient per determinar els preus dels bons. Tot i així, amb informació adicional podem calcular tots els preus dels bons amb diferent venciment.

Com acabem de veure, quan tenim els tipus d'interès a curt termini i els preus del n-bo que correspon al bo que venç més tard, podem obtenir tots els preus dels bons que vencen en un temps $m < n$. A partir de la definició de tipus d'interès a curt termini calculem els preus dels bons $B(k, k+1)$ i amb això les probabilitats neutrals al risc. Posteriorment amb la propietat de martingala obtenim els preus de tots els altres bons de venciment $m < n$ operant cap enrere. Com hem vist anteriorment, quan tenim els tipus d'interès a curt temini i les probabilitats neutrals al risc obtenim tots els preus dels bons calculant des de l'instant de temps n fins al 0. Sabem que al venciment el preu del bo és 1 aleshores amb la propietat de martingala usant el tipus d'interès a curt termini i la probabilitats neutrals al risc proporcionades trobem el preu del bo en un instant de temps abans. I aquest procediment es va repetint succesivament. També quan tenim els preus del bo de venciment n, que correspon al que venç més tard, obtenim les probabilitats neutrals al risc per temps $k \leq n$ i viceversa. Observem que donats els preus del bo que venç més tard, a temps n, les probabilitats neutrals al risc són fàcils de calcular en el model binomial, aleshores les utilitzem per calcular els preus dels altres bons amb venciment $k \leq n$. Alhora aquests preus generen noves probabilitats neutrals al risc que coincideixen amb les trobades anteriorment pel bo que venç a n.

Tot seguit veurem un model en el qual l'arbre binomial recombinable està determinat per pocs paràmetres. Anem a veure el model Ho-Lee.

4.3 Model Ho-Lee

El model Ho-Lee fou dissenyat per Thomas Ho i Sang Bin Lee l'any 1986. Fou el primer model lliure d'arbitratge per a determinar els preus dels actius, tot i així, tampoc és un model perfecte ja que hi podem trobar problemes com veurem posteriorment. Encara que no sigui un model gaire realista, els seus usos analítics són d'interès.

Aquest model manté moltes similituds amb el model Cox-Ross-Rubinstein.

El model Ho-Lee consisteix en un arbre binomial recombinable la qual cosa significa que els preus dels bons són independents del camí que s'ha seguit fins arribar al node, simplement, tenim en compte la posició del node en el qual ens trobem. De manera que el preu del bo del node w_k només depèn del nombre de moviments 'up' i 'down' que hem dut a terme des de l'inici fins al node w_k.
Sabem que el preu forward contractat a temps n d'un m-bo intercanviat a $n+1$ és $B(n,n+1,m) = \frac{B(n,m)}{B(n,n+1)}$ aleshores el model Ho-Lee modifica els preus forward de la següent manera

$$B^{w_{n+1}}(n+1,m) = \begin{cases} B^{w_n u}(n+1,m) = \frac{B^{w_n}(n,m)}{B^{w_n}(n,n+1)} h^u(m-(n+1)) \\ B^{w_n d}(n+1,m) = \frac{B^{w_n}(n,m)}{B^{w_n}(n,n+1)} h^d(m-(n+1) \end{cases}$$

on h^u i h^d els anomenem factors de perturbació que depenen del temps que falta per arribar a venciment, és a dir, $m-(n+1)$. En altres paraules, observem que a temps n els factors de creixement sense risc varien per factors que depenen del temps per arribar al venciment.

Notem que $\frac{h^u(m-(n+1))}{B^{w_n}(n,n+1)}$ i $\frac{h^d(m-(n+1))}{B^{w_n}(n,n+1)}$ corresponen als factors $1+U$ i $1+D$ del model Cox-Ross-Rubinstein, però en el model Ho-Lee aquests factors són diferents en tot l'arbre i per tots els bons, ja que depenen de la diferència entre m i n.

Aquest model s'assembla als models que hem vist anteriorment quan hem parlat de models multi-períodes on identificàvem patrons en l'arbre segons el temps que faltava per a que el bo arribès al venciment. Però en el model Ho-Lee tenim una forma més simple de determinar els factors de perturbació, tal i com veurem tot seguit. A més, també veurem, que a causa de les condicions imposades als factors de creixement és un model menys flexible que l'anterior.

Observant la definició dels preus forward en el model Ho-Lee ens suggereix una fórmula general per determinar preus dels bons que veurem en la següent proposició.

Proposició 4.4. *El preu a temps $n \geq 0$ d'un bo unitat que venç a temps m on $n \leq m \leq N$ al node w_n corresponent al camí $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ on $\alpha_1,...,\alpha_n \in \{u,d\}$ ve donat per*

$$B^{w_n}(n,m) = \frac{B(0,m)}{B(0,n)} \frac{h^{\alpha_1}(m-1)}{h^{\alpha_1}(n-1)} \frac{h^{\alpha_2}(m-2)}{h^{\alpha_2}(n-2)} \cdots \frac{h^{\alpha_n}(m-n)}{h^{\alpha_n}(0)}.$$

Demostració. Per inducció matemàtica,

$$B^{w_n}(n,m) = \frac{B^{w_{n-1}}(n-1,m)}{B^{w_{n-1}}(n-1,n)} \frac{h^{\alpha_n}(m-n)}{h^{\alpha_n}(0)}$$

$$= \frac{B^{w_{n-2}}(n-2,m)}{B^{w_{n-2}}(n-2,n)} \frac{h^{\alpha_{n-1}}(m-(n-1))}{h^{\alpha_{n-1}}(1)} \frac{h^{\alpha_n}(m-n)}{h^{\alpha_n}(0)}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{B(0,m)}{B(0,n)} \frac{h^{\alpha_1}(m-1)}{h^{\alpha_1}(n-1)} \frac{h^{\alpha_2}(m-2)}{h^{\alpha_2}(n-2)} \cdots \frac{h^{\alpha_{n-1}}(m-(n-1))}{h^{\alpha_{n-1}}(1)} \frac{h^{\alpha_n}(m-n)}{h^{\alpha_n}(0)}$$

□

Tot seguit anem a determinar els factors de pertorbació, és a dir, com són les funcions h^u i h^d. Recordem que el preu del bo a la data de venciment és 1, això implica per la definició del preu anterior que $h^u(0) = h^d(0) = 1$.

Considerem condicions per a que no hi hagi oportunitats arbitratge, és a dir, considerem una probabilitat en la que els preus descomptats dels bons unitat siguin martingales. En concret, el descompte el durem a terme mitjançant $B(n, n+1)$. De manera que a cada temps n i a cada node w_n hi ha probabilitat q tal que per $m > n$ tenim

$$B^{w_n}(n,m) = B^{w_n}(n,n+1)\left(qB^{w_n u}(n+1,m) + (1-q)B^{w_n d}(n+1,m)\right)$$

utilitzant la definició de preus forward de bons en el model Ho-Lee i simplificant, obtenim

$$1 = qh^u(m-(n+1)) + (1-q)h^d(m-(n+1)).$$

Assumim que q és la mateixa per a tot l'arbre independenment de n, w_n i m. Podem aconseguir una altre condició tenint en compte que l'arbre és recombinable, és a dir, quan estem al node w_n el preu del bo després de 'up' i 'down' en els següents dos passos serà el mateix que després de 'down' i 'up', per tant,

$$B^{w_n ud}(n+2,m) = B^{w_n du}(n+2,m).$$

Aplicant la definició del preu forward anterior i manipulant la igualtat, trobem

$$\frac{B^{w_n u}(n+1,m)h^d(m-(n+2))}{B^{w_n u}(n+1,n+2)} = \frac{B^{w_n d}(n+1,m)h^u(m-(n+2))}{B^{w_n d}(n+1,n+2)}$$

$$\frac{B^{w_n}(n,m)h^u(m-(n+1))h^d(m-(n+2))}{B^{w_n}(n,n+2)h^u(1)} = \frac{B^{w_n}(n,m)h^d(m-(n+1))h^u(m-(n+2))}{B^{w_n}(n,n+2)h^d(1)}$$

$$\frac{h^u(m-(n+1))h^d(m-(n+2))}{h^u(1)} = \frac{h^d(m-(n+1))h^u(m-(n+2))}{h^d(1)}$$

per $m \geq n+2$.

D'on treiem les següents propietats

$$qh^u(k) + (1-q)h^d(k) = 1$$

$$\frac{h^d(k+1)}{h^u(k+1)} = \frac{h^d(k)h^d(1)}{h^u(k)h^u(1)}.$$

Considerem $\delta = \frac{h^d(1)}{h^u(1)}$, fàcilment tenim $\delta^n = \frac{h^d(n)}{h^u(n)}$, aleshores per les propietats anteriors tenim els factors de perturbació definits de la següent manera

$$h^d(n) = \frac{\delta^n}{(1-q)\delta^n + q} \qquad\qquad h^u(n) = \frac{1}{(1-q)\delta^n + q}$$

per $n = 0, 1, 2, \ldots.$

Proposició 4.5. *Si el moviment 'down', d, succeeix j vegades en w_n llavors*

$$B^{w_n}(n,m) = \frac{B(0,m)}{B(0,n)}\delta^{j(m-n)}\frac{(1-q)\delta^{(n-1)}+q}{(1-q)\delta^{(m-1)}+q}\frac{(1-q)\delta^{(n-2)}+q}{(1-q)\delta^{(m-2)}+q}\cdots\frac{(1-q)\delta^{0}+q}{(1-q)\delta^{(m-n)}+q}.$$

Demostració. Suposem que $w_n = d^j u^{n-j}$ aleshores per la proposició anterior tenim

$$B^{d^j u^{n-j}}(n,m) = \frac{B(0,m)}{B(0,n)}\frac{h^d(m-1)}{h^d(n-1)}\cdots\frac{h^d(m-j)}{h^d(n-j)}\frac{h^u(m-j-1)}{h^u(n-j-1)}\cdots\frac{h^u(m-n)}{h^u(0)}$$

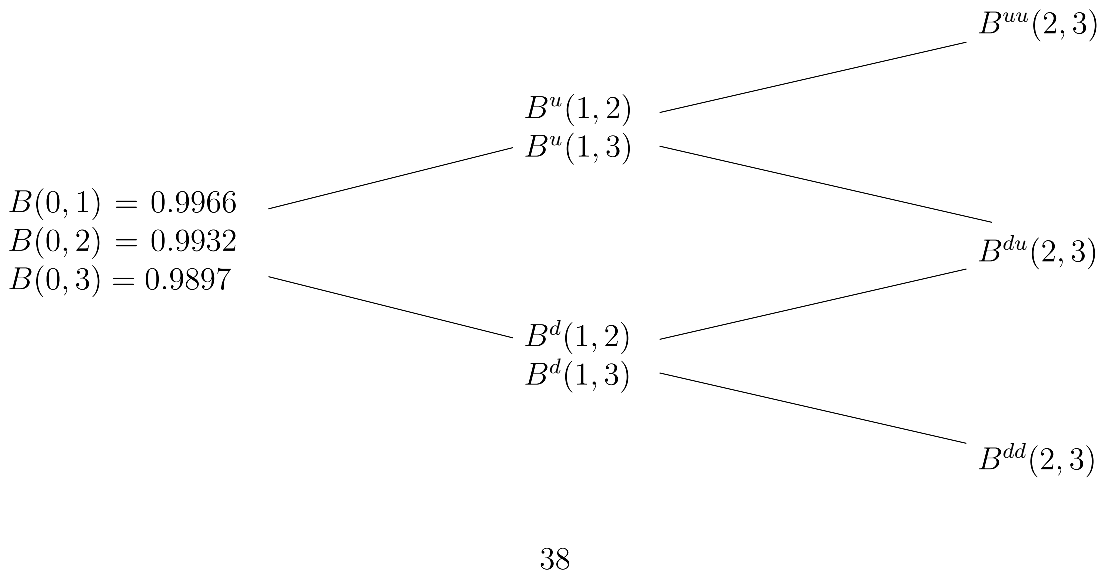
Substituint $h^d(k)$ per $\delta^k h^u(k)$ obtenint

$$B^{d^j u^{n-j}}(n,m) = \frac{B(0,m)}{B(0,n)}\delta^{j(m-n)}\frac{h^u(m-1)}{h(n-1)}\cdots\frac{h^u(m-n)}{h^u(0)}.$$

Finalment substituint per $h^u(k) = \frac{1}{(1-q)\delta^k+q)}$ obtenim la igualtat de l'enunciat. $\square$

Tal i com acabem de veure en aquesta proposició anterior, veiem que tots els preus dels bons es poden determinar amb els preus dels bons a temps 0, és a dir, $B(0,1), B(0,2), \cdots, B(0,N)$ i amb els paràmetres q i δ que podem obtenir reajustant el model. De fet tots els preus dels bons els podem expressar amb aquests valors ja que estem treballant amb un arbre recombinable, per tant, el preu del bo només depèn del número de vegades que succeix 'down' al llarg del camí.

Anem a veure un exemple numèric. Considerem $N = 3$, amb els següents preus inicials dels bons



Sigui $q = 1/2$ i $\delta = 0.99923$. Calculem els altres preus dels bons amb l'ajuda de l'Excel utilitzant la Proposició 4.8., obtenim

$$B^{uu}(2,3) = 0.9972$$

$$B^{u}(1,2) = 0.9970$$
$$B^{u}(1,3) = 0.9938$$

$$B(0,1) = 0.9966$$
$$B(0,2) = 0.9932$$
$$B(0,3) = 0.9897$$

$$B^{ud}(2,3) = 0.9965$$

$$B^{d}(1,2) = 0.9962$$
$$B^{d}(1,3) = 0.9923$$

$$B^{dd}(2,3) = 0.9957$$

Observem la igualtat entre els preus dels bons $B^{ud}(2,3)$ i $B^{du}(2,3)$ ja que en els dos camins recorreguts només a succeït un 'down' que és del que depenen els preus dels bons.

Tot seguit i per acabar, fem una petita incursió en el temps continu. Considerem els tipus d'interès a curt termini per temps continu definits per

$$r(n) = -\frac{lnB(n,n+1)}{p}.$$

Tot seguit apliquem els resultats anteriors per calcular els tipus d'interès a curt termini en el model Ho-Lee. Primer calculem el preu del bo $B^{d^j u^{n-j}}(n,n+1)$, per la proposició anterior i tinguent en compte que $h^u(0) = h^d(0) = 1$ fàcilment obtenim

$$B^{d^j u^{n-j}}(n,n+1) = \frac{B(0,n+1)}{B(0,n)}\delta^j h^u(n) = \frac{B(0,n+1)}{B(0,n)}\frac{\delta^j}{(1-q)\delta^n + q}.$$

Llavors per la definició anterior de tipus d'interès a curt termini en temps continu tenim

$$r^{d^j u^{n-j}}(n) = -\frac{1}{p}lnB^{d^j u^{n-j}}(n,n+1)$$

que podem reescriure com

$$r^{d^j u^{n-j}}(n) = f(0,n) - \frac{j}{p}ln\delta + \frac{1}{p}ln\left((1-q)\delta^n + q\right).$$

Obtenim la següent fórmula recursiva pels tipus d'interès a curt termini r(n):

$$r(2) = r(1) + \mathbb{E}(r(1))p \pm \sigma\sqrt{p}$$

$$r(3) = r(2) + \mathbb{E}(r(2))p \pm \sigma\sqrt{p} = r(1) + \mathbb{E}(r(1))p + \mathbb{E}(r(2))p \pm \sigma\sqrt{p} \pm \sigma\sqrt{p}$$

$$r(n+1) = r(n) + \mathbb{E}(r(n))p \pm \sigma\sqrt{p}.$$

Desenvolupant obtenim

$$r(n+1) = r(n) + f(0,n)p - (ln\delta)n\frac{1}{2} + ln\left(\frac{1}{2}(\delta^n + 1)\right) \pm \sqrt{n}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h}}ln\delta.$$

La seva esperança és

$$\mathbb{E}(r(n)) = f(0,n) - \frac{ln\delta}{h}n(1-q) + \frac{1}{h}ln\left((1-q)\delta^n + q\right)$$

i la seva variància és

$$\sigma^2_{r(n)} = \frac{(ln\delta)^2}{h^2}nq(1-q).$$

Observem que la variància dels tipus d'interès a curt termini és proporcional a n, de manera que els tipus d'interès tenen una volatilitat constant. Aquesta és una propietat important del model Ho-Lee.

En el nostre exemple anterior, aplicant directament la definició del tipus d'interès a curt termini en temps discret i amb l'ajuda de l'Excel, obtenim el següent arbre de tipus d'interès a curt termini

$$r^{uu}(2) = 0.033168$$

$$r^{u}(1) = 0.036443524$$

$$r(0) = 0.040939139 \qquad r^{ud}(2) = 0.04244067$$

$$r^{d}(1) = 0.045718727$$

$$r^{dd}(2) = 0.0517205$$

Tot seguit calculem les esperances i les variàncies dels tipus d'interès a curt termini que són

$\mathbb{E}(r(1)) = 0.041081126$	$\mathbb{E}(r(2)) = 0.042442461$
$\sigma^2_{r(1)} = 0.000022$	$\sigma^2_{r(2)} = 0.000043$

Observem la linealitat de les variàncies respecte n tal i com hem vist en el model Ho-Lee continu.

Finalment observem que el model Ho-Lee no és un model perfecte ja que té certes limitacions. Una d'elles és la possibilitat de que els valors dels tipus d'interès a curt termini siguin negatius, sobretot quan avancem al llarg del temps. Una altra és la correlació perfecta que trobem entre els diferents moviments ja que a la pràctica, en els models reals, no solem trobar mai una correlació perfecta.

El model proposat anteriorment en l'apartat de multi-períodes és més flexible en alguns aspectes però a l'utilitzar arbres binomials comparteix algunes limitacions amb el model Ho-Lee a la pràctica.

5 Annex

5.1 Subjacents

Considerem un subjacent de S el qual representem per un perfil de beneficis aleatori de la següent forma $H(1) = h(S(1))$ on h és una funció $h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. De fet qualsevol variable aleatòria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la podem escriure com anteriorment. Nosaltres, en el nostre espai mostral $\Omega = \{u, d\rangle$ ho simplificarem escrivint $h(S^u) = X(u)$ i $h(S^d) = X(d)$. Clarament, $S^u \neq S^d$.

Generant $H(1)$ obtenim el següent sistema

$$\begin{cases} xS^u + yA(0)(1+R) = h(S^u) \\ xS^d + yA(0)(1+R) = h(S^d) \end{cases}$$

Recordem que A és un compte bancari amb una seqüència de preus determinats. La solució única que trobem és

$$x_H = \frac{h(S^u) - h(S^d)}{S^u - S^d}$$

aquest valor és conegut en els mercats com a delta. Acabem obtenint,

$$x_H = \frac{h(S^u) - h(S^d)}{S(0)(U - D)}$$

$$y_H = \frac{(1+U)h(S^d) - (1+D)h(S^u)}{A(0)(U-D)(1+R)}.$$

Imposem que el preu del subjacent sigui el valor a temps 0 de la cartera, de manera que

$$H(0) = V_{(x_H, y_H)}(0) = x_H S(0) + yA(0)$$

prenent els valors x_H i y_H tenim

$$H(0) = \frac{h(S^u) - h(S^d)}{(U-D)} + \frac{(1+U)h(S^d) - (1+D)h(S^u)}{(U-D)(1+R)}.$$

Teorema 5.1. *El Principi de No Arbitratge implica que el preu del subjacent amb perfil de beneficis $H(1) = h(S(1))$ té la forma*

$$H(0) = \frac{h(S^u) - h(S^d)}{(U-D)} + \frac{(1+U)h(S^d) - (1+D)h(S^u)}{(U-D)(1+R)}.$$

Reescrivint $H(0)$,

$$h(S^u)\left(-\frac{1+D}{(U-D)(1+R)} + \frac{1}{U-D}\right) + h(S^d)\left(\frac{1+U}{(U-D)(1+R)} + \frac{1}{U-D}\right)$$

$$h(S^u)\frac{R+D}{(U-D)}(1+R)^{-1} + h(S^d)\left(1 - \frac{R-D}{U-D}\right)(1+R)^{-1}.$$

Observem que

$$1 - \frac{R-D}{U-D} = \frac{U-R}{U-D}$$

denotarem $q = \frac{R-D}{U-D}$. Obtenim,

$$H(0) = (1+R)^{-1}\left(h(S^u)q + h(S^d)(1-q)\right).$$

Pel Principi de No Arbitratge tenim $D < R < U$, de la mateixa manera tenim $0 < R - D < U - D$, de manera que, $0 < q < 1$. Així doncs podem interpretar Q com la probabilitat neutral al risc.
Tenim l'expressió matemàtica de l'esperança de la variable aleatòria $h(S(1))$ que és

$$\mathbb{E}_Q(h(S(1)) = qh(S^u) + (1-q)h(S^d)$$

i la fórmula que ens determina els preus és

$$H(0) = \mathbb{E}_Q\left((1+R)^{-1}h(S(1))\right).$$

Teorema 5.2. *El preu del subjacent és el valor esperat del perfil de beneficis descomptats respecte la probabilitat neutral al risc.*

Considerem els valors descomptats dels preus dels actius i en calculem l'esperança

$$\mathbb{E}_Q(\tilde{S}(1)) = q\frac{S(0)(1+U)}{(1+R)} + (1-q)\frac{S(0)(1+D)}{(1+R)}$$

prenent $q = \frac{(R-D)}{(U-D)}$ i $1 - q = \frac{U-R}{U-D}$ tenim

$$\mathbb{E}_Q(\tilde{S}(1)) = S(0) = \tilde{S}(0).$$

D'aquesta manera veiem que els preus descomptats esperats són els mateixos, $\tilde{S}(0) = \tilde{S}(1)$, obtenint així una martingala sota la probabilitat Q. Anomenarem Q probabilitat de martingala. Notem que anteriorment, Q l'hem anomenada probabilitat neutral al risc degut al següent teorema.

Teorema 5.3. *La rendibilitat esperada respecte la probabilitat Q de l'actiu és igual a la rendibilitat sense risc, si i només si, Q és la probabilitat de martingala.*

Demostració. Considerem la rendibilitat,

$$K = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}$$

aleshores depenent dels possibles escenaris la rendibilitat serà U o bé D. Calculem

$$\mathbb{E}_Q(K) = qU + (1-q)D$$

prenent $q = \frac{R-D}{U-D}$, obtenim $\mathbb{E}_Q(K) = R$, per tant, Q és la probabilitat d'una martingala.
Per altra banda, si considerem $qU + (1-q)D = R$, llavors obtenim $q = \frac{R-D}{U-D}$. $\square$

5.2 Model Cox-Ross-Rubinstein

Anem a veure com caracteritzem el model Cox-Ross-Rubinstein.

Suposem que hi ha N períodes de longitud p, per tant, a cada instant de temps $t = np$, on $n = 0, 1, \ldots, N$, es poden comercialitzar actius.

Introduim l'espai mostral per un model de N períodes amb dos esdeveniments possibles a cada instant, en concret 'up' i 'down'. Per tant l'espai mostral és $\Omega = \{u, d\}^N$. Considerem $w \in \Omega$ com els camins del nostre arbre binomial representat per una seqüència de 'u' i 'd', que ens facilitarà descriure la posició en la que ens trobem en el nostre arbre en temps k. A més, considerem $P(w) = p^j(1-p)^{N-j}$ on j és el nombre de vegades ha succeit l'esdeveniment 'up'. Notem que la probabilitat de tots els camins w que tinguin j 'up' tenen probabilitat $\binom{N}{j}p^j(1-p)^{N-j}$. Veiem que per $n \leq N$ les divisions binomials indueixen particions de l'espai mostral de 2^n conjunts disjunts, per tant, considerem $\mathcal{P}_n = \{B_{u\ldots u}, \ldots, B_{d\ldots d}\}$. Per exemple, si $N = 3$ la partició $\mathcal{P}_1 = \{B_u, B_d\}$ i $\mathcal{P}_2 = \{B_{uu}, B_{ud}, B_{du}, B_{dd}\}$ on $B_u = \{uuu, uud, udu, udd\}, B_d = \{duu, dud, ddu, ddd\}, B_{uu} = \{uuu, uud\}, B_{ud} = \{udu, udd\}, B_{du} = \{duu, dud\}$ i $B_{dd} = \{ddu, ddd\}$. És a dir, en cada partició hi ha les diferents combinacions de esdeveniments de n elements i en els conjunts B hi han tots els camins que tenen iguals els n primers esdeveniments. Diem que la seqüència de particions $(\mathcal{P}_n)_{n\leq N}$ és refinada si per cada $n \leq N$, $\mathcal{P}_n$ és una unió finita de $\mathcal{P}_{n+1}$.

Fixem U, D tals que $-1 < D < U$ per representar les rendibilitats aleatòries en cada període per

$$K_n = \begin{cases} U & \text{amb probabilitat } p \\ D & \text{amb probabilitat } 1-p \end{cases}$$

Notem que K_n només actuarà sobre els n primers valors de la seqüència de w. A més, notem també que aquestes rendibilitats són independents. Això ens servirà per calcular les probabilitats de forma més senzilla.

Assumim que tenim un actiu S tal que coneixem $S(0)$, mentres que

$$S(n) = S(n-1)(1 + K_n)$$

la qual cosa ens indica que els preus dels actius segueixen l'estructura d'un arbre binomial recombinable.
A més considerem un compte bancari A amb rendibilitat R constant a cada període, per tant, coneixem prèviament tots els seus valors, on $A(0) = 1$ i

$$A(n) = A(n-1)(1 + R)$$

per $n = 1, \ldots, N$.
Per evitar condicions d'arbitratge assumim $D < R < U$.

Teorema 5.4. *La seqüència dels preus d'actius descomptats en el model binomial és una martingala respecte la filtració $\mathcal{P}_n$ i probabilitat Q.*

Demostració. Anem a examinar els dos preus corresponents a cada node del següent període i calcular les seves esperances per un únic període. És a dir, per $B \in \mathcal{P}_n$ per $n = 0, 1, \ldots, N-1$

$$Q(S(n+1)|B) = Q(S(n)(1+U)|B) = q$$
$$Q(S(n+1)|B) = Q(S(n)(1+D|B) = 1-q$$

com que $q = \frac{R-D}{U-D}$ i $1-q = \frac{U-R}{U-D}$, obtenim

$$\mathbb{E}_Q(S(n+1)|\mathcal{P}_n) = S(n)(1+U)\frac{U-R}{U-D} + S(n)(1+D)\frac{U-R}{U-D} = S(n)(1+R)$$

que ens dóna el resultat al descomptar. $\square$

D'aquest últim teorema sorgeix el següent considerant subjacents d'algun actiu

Teorema 5.5. *En un arbre binomial els preus descomptats d'un subjacent amb perfil de beneficis $H(N)$ venen donats per la probabilitat de martingala per la fórmula recursiva*

$$\tilde{H}(n-1) = \mathbb{E}_Q(\tilde{H}(n)|\mathcal{P}_{n-1})$$

per $n = 1, \ldots, N$. En particular, el preu inicial ve donat per

$$H(0) = (1+R)^{-N}\mathbb{E}_Q(H(N)).$$

Si una variable aleatòria $H(N)$ té la següent forma

$$H(N) = h(S(N))$$

llavors podem escriure

$$H(N) = h(S(0)(1+U)^Y(1+D)^{N-Y})$$

on Y és una variable aleatòria que indica el número de 'up' que hi ha en aquests N períodes. Llavors

$$H(0) = (1+R)^{-N}\sum_{k=0}^{N} q^k(1-q)^{N-k}h\left(S(0)(1+U)^k(1+D)^{N-k}\right).$$

5.3 Martingales

Una seqüència $M(n)$ de variables aleatòries és una martingala respecte la filtració $\{\mathcal{P}_n\}$ si es compleixen les tres condicions següents:

(i) $M(n)$ és procès adaptat a la filtació $\{\mathcal{P}_n\}$,

(ii) $\mathbb{E}(|M(n)|) < \infty$ per a tot n,

(iii) $\mathbb{E}(M(n)|\mathcal{P}_{n-1}) = M(n-1)$, quasi segurament per tot a n.

Observem que aquesta tercera propietat la podem reescriure com

$$\mathbb{E}(M(n) - M(n-1)|\mathcal{P}_{n-1}) = 0$$

quasi segurament per a tot n

Proposició 5.6. *$M(n)$ és una martingala si i només si per a tot $j \geq 0$ $\mathbb{E}(M(n+j)|\mathcal{P}_n) = M(n)$.*

Demostració. Es pot veure fàcilment tenint en compte la propietat de la torre de les esperances condicionades, de manera que

$$\mathbb{E}(M(n+j)|\mathcal{P}_n) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(M(n+j)|\mathcal{P}_{n+j-1})|\mathcal{P}_n\right) = \mathbb{E}(M(n+j-1)|\mathcal{P}_n)$$

repetint succesivament comprovem la igualtat de l'enunciat. □

Proposició 5.7. *Si $M(n)$ és una martingala, $\mathbb{E}(M(n)) = \mathbb{E}(M(0))$ per a tot n.*

Demostració. Per la tercera propietat de la definició de martingala tenim que per a tot n es compleix

$$M(n-1) = \mathbb{E}(M(n)|\mathcal{P}_{n-1}).$$

Aplicant l'esperança obtenim

$$\mathbb{E}(M(n-1)) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(M(n)|\mathcal{P}_{n-1})\right) = \mathbb{E}(M(n))$$

per a cada n. □

El que ens está dient aquesta última proposició és que una martingala és un procès amb esperança constant.

5.4 Teoremes Fonamentals de les Finances

Primer Teorema Fonamental de les Finances. Un mercat finit és viable si i només si existeix una probabilitat Q equivalent a P tal que els preus descomptats dels actius amb risc són martingales.

Segon Teorema Fonamental de les Finances. Un mercat viable és complet si i només si existeix una única mesura neutral al risc Q.

6 Conclusions

Els bons són instruments de renda fixa que consisteixen en contractes que es basen en l'entrega d'un nominal en la data d'emissió de part d'un inversor a un emissor i la devolució d'aquest nominal més els interessos obtinguts a la data de venciment de part de l'emissor a l'inversor. El bo cupó zero s'emet descomptat del preu nominal que rebrà a venciment. Tinguem clar que renda fixa no vol dir que la rendibilitat sigui fixa ni tampoc que hi hagi absència de risc, sinó que dependrà de la manera que actuï l'inversor.

Els preus dels bons estan determinats per l'EURIBOR, però no coneixem l'EURIBOR en un temps futur per la qual cosa no coneixem els preus dels bons en el futur. Els models de mercats reals han de permetre que els preus dels bons del futur siguin valors no coneguts, és a dir, valors aleatòris. Suposant que fossin coneguts, el Principi de No Arbitratge ens proporciona un preu del bo en un temps futur. Hem definit els preus d'un contracte forward d'un bo cupó zero d'on hem determinat el tipus d'interès a curt termini, que és el tipus d'interès que s'aplica a dia d'avui a un bo que venç al següent període. Hem determinat bons amb cupó fix i bons amb cupó de tipus d'interès variable i els swaps de tipus d'interès a partir d'una cartera de bons. D'aquesta manera hem vist que els preus dels bons estan estretament relacionats amb els tipus d'interès a curt termini.

Per modelitzar els preus dels bons ho duem a terme utilitzant un arbre binomial uniforme i ho farem tinguent en compte tots els bons de diferent venciment alhora.

La primera manera de modelitzar els preus dels bons ha estat identificar patrons en l'arbre binomial de la forma $(n-k)to(n-(k+1))$. Assumint $q = 1/2$ i que els preus dels bons de diferents venciments $n \leq N$ a temps 1 són coneguts obtenim com hem indicat la pertorbació $\epsilon_{nto(n-1)}$ depenent de la distància a venciment que aplicarem en tots els arbres simples que s'identifiquin amb el mateix patró. Així doncs obtenim els preus

$$B^{w_k u}(k+1,n) = B^{w_k}(k,n)(1 + R^{w_k}(k) + \epsilon_{(n-k)to(n-k-1)})$$

$$B^{w_k d}(k+1,n) = B^{w_k}(k,n)(1 + R^{w_k}(k) - \epsilon_{(n-k)to(n-k-1)}).$$

Tot i que cal vigilar que els preus dels bons no siguin superiors a la unitat.

Utilitzant ara els tipus d'interès a curt termini podem determinar els preus dels bons si tenim unes condicions extres.
Una manera és a partir dels tipus d'interès a curt termini i les probabilitats neutrals al risc trobar tots els preus dels bons en qualsevol instant de temps calculant des del venciment fins a temps 0. Cal que el model sigui suficientment flexible per tal de poder reajustar les probabilitats neutrals al risc o bé els tipus di'interès a curt temini per tal d'obtenir els preus fixats pel mercat a temps 0.

Hem vist varis models per determinar els tipus d'interès a curt termini. El model de Merton determina

$$r^{w_k u}(k+1) = r^{w_k}(k) + ap - \sigma\sqrt{p}$$

$$r^{w_k d}(k+1) = r^{w_k}(k) + ap + \sigma\sqrt{p}$$

on a i σ són valors reals i $r(0)$ ve determinat. El model Vasicek determina

$$r^{w_k u}(k+1) = r^{w_k}(k) + (a - br^{w_k})p - \sigma\sqrt{p}$$

$$r^{w_k d}(k+1) = r^{w_k}(k) + (a - br^{w_k})p + \sigma\sqrt{p}$$

on a, b i σ són valors reals positius i $r(0)$ ve determinat. En aquests models cal vigilar que els tipus d'interès no siguin negatius per a que els preus dels bons no siguin més grans que 1.

Una altre manera de determinar els preus dels bons és a partir dels tipus d'interès i amb els preus del n-bo que correspon al bo que venç més tard. Aleshores, aplicant les següents fórmules podem recuperar qualsevol preu dels bons amb venciment $m = 2, \cdots, n-1$. Primer determinem les probabilitats neutrals al risc

$$q^{w_k}(k) = \frac{\frac{1}{B^{w_k}(k,k+1)} - \frac{B^{w_k d}(k+1,n)}{B^{w_k}(k,n)}}{\frac{B^{w_k u}(k+1,n)}{B^{w_k}(k,n)} - \frac{B^{w_k d}(k+1,n)}{B^{w_k}(k,n)}}.$$

I aleshores utilitzant la propietat de martingala en cada instant de temps calculem els preus dels bons en l'instant de temps previ. Obtenim

$$B^{w_k}(k,m) = \frac{1}{1 + pr^{w_k}(k)}\left(q^{w_k}(k)B^{w_k u}(k+1,m) + (1 - q^{w_k}(k))B^{w_k d}(k+1,m)\right).$$

D'aquesta manera calculant successivament cap enrere aconseguim trobar tots els preus de tots els bons.

L'última manera és a partir dels preus del bo que venç més tard obtenim les probabilitats neutrals al risc per temps $k \leq n$ i viceversa. Utilitzant la propietat de martingala.

Finalment hem vist el model Ho-Lee que es basa en un arbre binomial recombinable, en el qual el preu del bo en aquell moment només depèn de les vegades que ha succeït 'down' fins a arribar al node. Llavors els preus dels bons es defineixen com

$$B^{w_n}(n,m) = \frac{B(0,m)}{B(0,n)}\delta^{j(m-n)}\frac{(1-q)\delta^{(n-1)} + q}{(1-q)\delta^{(m-1)} + q}\frac{(1-q)\delta^{(n-2)} + q}{(1-q)\delta^{(m-2)} + q}\cdots\frac{(1-q)\delta^{0} + q}{(1-q)\delta^{(m-n)} + q}$$

on podem utilitzar δ i h per reajustar el model. Tot i així, com he vist té certes limitacions.

En conclusió, tots els preus dels bons estan determinats de manera que no hi hagi oportunitats d'arbitratge considerant la família de bons. Clarament, en tota l'explicació de com modelitzar els preus dels bons veiem com es compleixen els Teoremes Fonamentals de les Finances. Aquests teoremes ens diuen que hi ha una única probabilitat Q sota la qual els preus descomptats són martingala, que correspon a l'anomenada probabilitat neutral al risc.

Per trobar models que s'acostin més a la realitat i solventar algun dels problemes trobats, podríem endinsar-nos en la modelització de bons a temps continu.

Referències

[1] Capinski, M.; Kopp, E.: *Discrete Models of Financial Markets*, Cambridge University Press, 2012.

[2] Hull, J.C.: *Options, futures and other derivatives*, 4th edition, International Edition, 2000.

[3] Shreve, S.E.: *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer, 2004.

[4] Vives, J.: *Apunts modelització estocàstica*, UB, Primavera 2018.

[5] Margalef, J.; Miret. S.; Outerelo. E: *Probabilidad y Economía 4: Mercados financieros continuos*, Sanz y Torres, 2017.